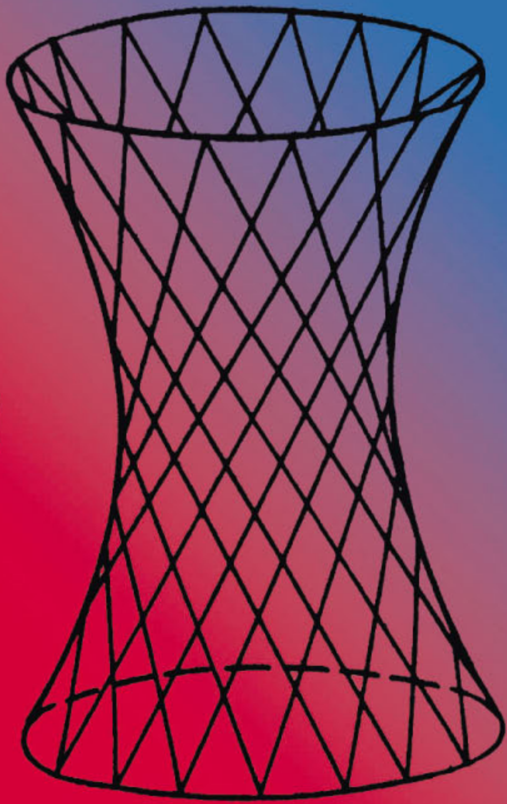
УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ



И.И. БАВРИН
В.Л. МАТРОСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВУЗОВ

И.И. Баврин, В.Л. Матросов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений

Москва
ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС
2004

УДК 51я73
ББК 22.11я73
Б13

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор *Е.А. Горин*;
доктор физико-математических наук,
профессор *П.К. Суетин*

Баврин И.И., Матросов В.Л.
Б13 Высшая математика: Учеб. для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. — 400 с.: ил.
ISBN 5-691-01223-1.

В учебнике излагаются аналитическая геометрия, математический анализ и теория вероятностей. Теоретический материал сопровождается большим числом разобранных примеров и задач, а также упражнениями для самостоятельной работы.

Книга адресована студентам высших учебных заведений, а также преподавателям средних учебных заведений, стремящихся повысить свое педагогическое мастерство.

УДК 51я73
ББК 22.11я73

ISBN 5-691-01223-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Поэтому подготовка будущих учителей специальности «Учитель технологии и предпринимательства» тесно связана с получением соответствующих математических знаний и практических навыков. Основой этих знаний является курс «Высшей математики», читаемый студентам этой специальности.

Настоящая книга является учебником по этому курсу. Она написана в соответствии с программой курса высшей математики для специальности «Учитель технологии и предпринимательства» и с учетом профессиональной направленности будущих учителей этой специальности. В ней изложены аналитическая геометрия, математический анализ и теория вероятностей; приведено много примеров и задач как чисто математического характера, так и из физики, техники и экологии, а также других дисциплин, иллюстрирующих понятия высшей математики и ее методы.

К каждой главе имеются упражнения для самостоятельной работы студентов. Ответы к упражнениям (там, где в этом есть необходимость) приведены сразу после текста — они указаны в квадратных скобках.

Авторы

Раздел I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

1. Декартовы прямоугольные координаты. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с указанными на них положительными направлениями (рис. 1). Прямые Ox и Oy называются *координатными осями*, точка их пересечения O — *началом координат*. Обычно полагают, что ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна относительно наблюдателя; положительное направление на Ox слева направо, на Oy — снизу вверх.

Выберем единицу масштаба (будем предполагать, что на обеих осях координат выбрана одна и та же единица масштаба). Координатные оси Ox, Oy с выбранной единицей масштаба называются *декартовой прямоугольной* (или кратко *прямоугольной*) *системой координат* на плоскости. (Декартова прямоугольная система координат носит имя французского математика, основателя аналитической геометрии Рене Декарта (1596–1650).)

Произвольной точке M плоскости поставим в соответствие два числа (рис. 1):

абсциссу x, равную расстоянию от точки M до оси Oy, взятому со знаком «+», если M лежит правее Oy, и со знаком «−», если M лежит левее Oy;

ординату y, равную расстоянию от точки M до оси Ox, взятому со знаком «+», если M лежит выше Ox, и со знаком «−», если M лежит ниже Ox.

Абсцисса x и ордината y называются *декартовыми прямоугольными* (или *прямоугольными*) координатами точки M. Запись $M(x; y)$ читают: «Точка M с абсциссой, равной x, и ординатой, равной y».

Отметим, что *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y* (ее координат). Верно и

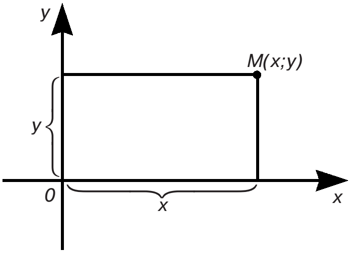


Рис. 1

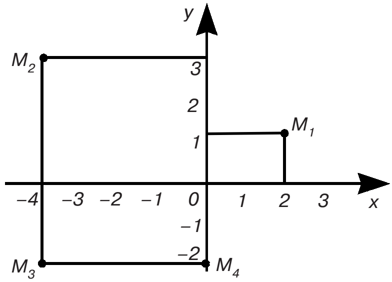


Рис. 2

обратное: *каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости*. Это значит, что положение на плоскости произвольной точки M полностью определяется ее координатами x и y.

Координатные оси Ox и Oy разбивают плоскость на I, II, III, IV квадранты (рис. 2). Знаки координат точек в различных квадрантах указаны в таблице:

	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

При этом если точка $M(x;\ y)$ лежит на оси Oy, то $x = 0$; если $M(x;\ y)$ лежит на оси Ox, то $y = 0$.

На рис. 2 построены точки $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-4;\ 3)$, $M_3(-4;\ -2)$ и $M_4(0;\ -2)$.

2. Полярные координаты. Зафиксируем на плоскости точку O и выходящую из нее полупрямую Op, а также выберем единицу масштаба (рис. 3). Точка O называется *полюсом*, полупрямая Op — *полярной осью*.

Произвольной точке M (отличной от O) плоскости поставим в соответствие два числа:

полярный радиус r, равный расстоянию от точки M до полюса O;

полярный угол φ, равный углу между полярной осью Op и полупрямой OM.

Полярный угол φ измеряется в радианах, отсчет положительных (отрицательных) значений ведется от Op против движения

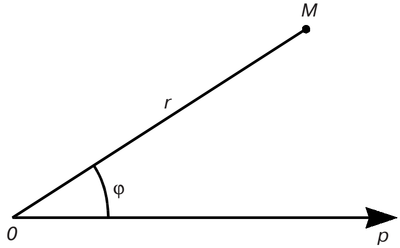


Рис. 3

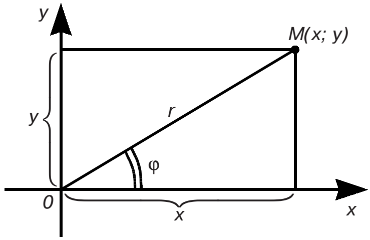


Рис. 4

(по движению) часовой стрелки. При этом обычно полагают, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Полюсу O соответствует полярный радиус $r = 0$, полярный угол для него не определен.

Запись $M(r; \varphi)$ означает: точка M с полярными координатами r и φ.

Найдем зависимость между прямоугольными и полярными координатами. Будем считать начало координат O прямоугольной системы xOy одновременно полюсом O, а луч Ox примем за полярную ось Op (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что для точки $M(x; y)$ ($M(r; \varphi)$) справедливы соотношения

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{1}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Формулы (1) выражают прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Это можно доказать для любого расположения точки M на координатной плоскости. Формулы (2) выражают полярные координаты точки M через ее прямоугольные координаты и тоже верны при любом положении точки M.

Заметим, что $\mathrm{tg}\varphi = y/x$ дает два значения, так как $-\pi < \varphi \leq \pi$. Поэтому для вычисления полярного угла точки M по ее прямоугольным координатам x и y предварительно выясняют, в каком квадранте лежит точка M.

Пример 1. Даны прямоугольные координаты точки A: $x = 1$, $y = 1$. Найти ее полярные координаты. По формулам (2) находим $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\varphi = 1$. Из двух значений $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = -3\pi/4$ выбираем $\varphi = \pi/4$, так как точка A лежит в первом квадранте. Итак, полярные координаты данной точки $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

Пример 2. Полярные координаты точки A таковы: $r = 2$, $\varphi = \pi/2$. Тогда по формулам (1) прямоугольные координаты этой точки будут $x = 2\cos(\pi/2) = 0$, $y = 2\sin(\pi/2) = 2$.

1.2. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

1. Расстояние между двумя точками. Найдем расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 5). Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора имеем

$$d = M_1M_2 = \sqrt{M_1N^2 + NM_2^2}.$$

Известно, что расстояние между точками A и B, расположенными на координатной прямой (оси), вычисляется по формуле $d = AB = |x_B - x_A|$, где x_A и x_B — координаты точек A и B этой прямой. Но $M_1N = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$, $NM_2 = B_1B_2 = |y_2 - y_1|$. Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$. По формуле (1) имеем

$$AB = \sqrt{(-4+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

2. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти точку $M(x; y)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \qquad (2)$$

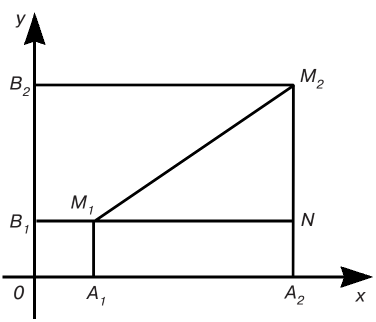


Рис. 5

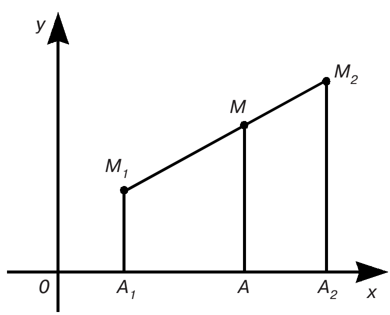


Рис. 6

Опустим из точек M_1, M и M_2 перпендикуляры на ось Ox (рис. 6), получим

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{A_1A}{AA_2}.$$

При выбранном расположении точек имеем

$$A_1A = x - x_1, AA_2 = x_2 - x.$$

Поэтому заданное отношение (2) принимает вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда

$$x = (x_1 + \lambda x_2)/(1 + \lambda). \quad (3)$$

Аналогично

$$y = (y_1 + \lambda y_2)/(1 + \lambda). \quad (4)$$

В частности, если $\lambda = 1$, т. е. при делении отрезка M_1M_2 пополам, получаем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Примечание. Формулы (3) и (4) верны при любом расположении точек M_1 и M_2.

Пример. Вычислить координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок M_1M_2, где $M_1(1; 1)$ и $M_2(4; 7)$, в отношении $M_1M/MM_2 = 2$. Согласно формулам (3) и (4) имеем

$$x = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = 3, \quad y = \frac{1 + 2 \cdot 7}{3} = 5.$$

1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Прямоугольная и полярная системы координат позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Определение. *Уравнением линии* на плоскости в прямоугольной системе координат xOy называется уравнение $f(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y уравнения линии называются *текущими* координатами.

Покажем, например, что уравнение $x - y = 0$, или

$$x = y, \quad (1)$$

является уравнением биссектрисы I и III координатных углов.

По определению биссектрисы угла для произвольной точки $M(x; y)$ (лежащей на биссектрисе) имеем $N_2M = N_1M$ или $ON_1 = ON_2$ (рис. 7), и поэтому $x = y$, т. е. координаты всех точек биссектрисы удовлетворяют уравнению (1). Очевидно также, что у любой точки, не лежащей на данной биссектрисе, координаты не равны между собой и не удовлетворяют уравнению (1).

Отметим, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда будет линия. Может случиться, что уравнению соответствует лишь несколько точек (уравнению $x^2 + y^2 = 0$, например, на плоскости соответствует только одна точка (0; 0)). Встречаются и такие случаи, когда заданному уравнению не соответствует на плоскости ни одна точка (как, например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

1.4. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy (рис. 8). Обозначим точку пересечения l с осью Oy буквой $B(0; b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l обозначим φ. Угол φ, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки ($0 \leqslant \varphi < \pi$), называется *углом наклона* прямой l к оси Ox.

Выведем уравнение прямой l.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l с текущими координатами x и y. Из прямоугольного треугольника BMN (рис. 8) имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - b}{x}. \qquad (1)$$

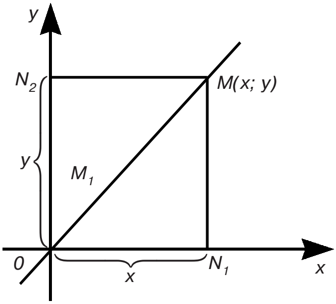


Рис. 7

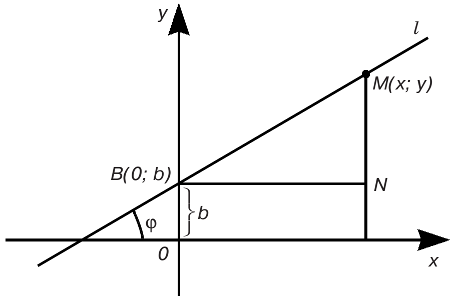


Рис. 8

Эту величину называют *угловым коэффициентом* прямой и обозначают k: $k = \operatorname{tg} \varphi$. Тогда из равенства (1) получим

$$k = \frac{y - b}{x},$$

откуда

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, число b называется *начальной ординатой* (это ордината точки B).

Пример. Если $\varphi = \pi/4$, $b = -3$, то $k = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ и уравнение данной прямой имеет вид $y = x - 3$.

Если в уравнении (2) $k = 0$, то имеем уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку $B\ (0; b)$:

$$y = b. \qquad (3)$$

При $b = 0$ из (3) получаем уравнение координатной оси Ox: $y = 0$.

По аналогии с уравнением (3) уравнение

$$x = a \qquad (4)$$

есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A(a; 0)$. При $a = 0$ из равенства (4) имеем уравнение координатной оси Oy: $x = 0$.

2. Общее уравнение прямой. Уравнением с угловым коэффициентом может быть задана любая прямая на плоскости, не параллельная оси ординат.

Любую прямую без каких-либо ограничений можно задать уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (5)$$

где A и B — коэффициенты, одновременно не равные нулю.

Теорема. *Каждая прямая на плоскости с прямоугольной системой координат определяется уравнением первой степени, и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости.*

Доказательство. 1) Пусть дана прямая, не параллельная оси ординат. В этом случае прямая описывается уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, которое является частным случаем уравнения (5) при $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

Пусть теперь прямая параллельна оси Oy. Тогда ее уравнение запишется в виде $x = a$. Это уравнение тоже частный случай уравнения (5) при $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Итак, любая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени.

2) Покажем теперь, что произвольному уравнению первой степени (5) (A и B одновременно не равны нулю) соответствует некоторая прямая на плоскости.

Действительно, если $B \neq 0$, то уравнение (5) можно преобразовать в уравнение

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A},$$

т. е. в уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -A/B$ и начальной ординатой $b = -C/B$. Если $B = 0$, $A \neq 0$, то уравнение (5) преобразуется к виду $x = -C/A$, т. е. в уравнение прямой, параллельной оси Oy. Теорема доказана.

Уравнение первой степени (5) (A и B одновременно не равны нулю), описывающее на плоскости любую прямую, называется *общим уравнением прямой*.

3. Уравнение прямой в отрезках. Предположим, что в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Перенесем C в правую часть и разделим обе части полученного уравнения на $-C$, получим $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$, или $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$. Обозначив $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{A} = b$, придем к уравнению

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *уравнением прямой в отрезках*. Это название объясняется тем, что числа a и b определяются отрезками OA и OB, которые прямая отсекает на осях координат (рис. 9). Такой вид уравнения удобен для построения прямой.

Заметим, что прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y = kx + b. \tag{7}$$

Так как искомая прямая проходит через точку M_1, то

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{8}$$

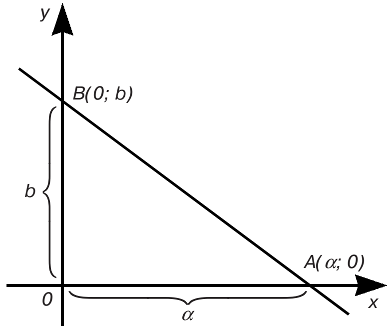


Рис. 9

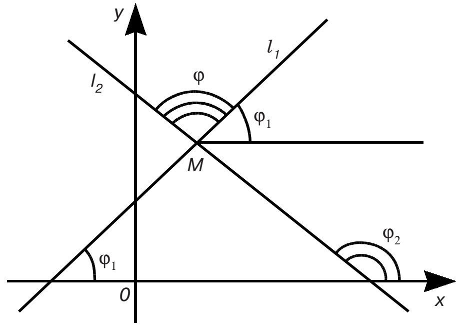


Рис. 10

Вычитая из равенства (7) равенство (8), получаем

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (9)$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 8)$, с угловым коэффициентом $k = 1$ согласно (9) есть $y - 8 = x + 1$, или $x - y + 9 = 0$.

Примечание 1. В уравнении (9) постоянная k может быть любым действительным числом. Поэтому в форме (9) может быть записано уравнение всякой прямой, проходящей через точку M_1, не параллельной оси Oy. Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1, параллельно оси Oy, будет иметь вид $x = x_1$ (п. 1).

Примечание 2. Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется *пучком прямых*, а общая их точка — *центром* пучка.

5. Угол между прямыми. Рассмотрим на плоскости две прямые l_1: $y = k_1x + b_1$ — и l_2: $y = k_2x + b_2$ — с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 10).

Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол $(\widehat{l_1, l_2}) = \varphi$ — *наименьший угол*, на который надо повернуть первую прямую l_1 вокруг точки пересечения M против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 $(0 \leqslant \varphi < \pi)$. Из рис. 10 видно, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (10)$$

Формула (10) дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$, и, следовательно, $k_1 = k_2$, т. е. *параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.*

Обратно: если $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$. Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$, так как $0 \leqslant \varphi < \pi$, и прямые l_1 и l_2 параллельны.

Пусть $\varphi = \pi/2$, т. е. l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны. В этом случае
$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, откуда $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \pi/2) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -1/\operatorname{tg} \varphi_1$, или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \tag{11}$$

т. е. *угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку*.

Справедливо и обратное утверждение.

Пример. Найти две прямые, проходящие через начало координат, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $y = 2x - 3$.

Так как искомые прямые проходят через точку (0; 0), то их уравнения имеют вид $y = k_1x$, $y = k_2x$. Для данной прямой $k = 2$. Отсюда и на основании условий параллельности и перпендикулярности прямых получаем $k_1 = 2$ и $k_2 = -1/2$. Поэтому искомые прямые запишутся уравнениями $y = 2x$ и $y = -x/2$.

6. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Если две прямые l_1 и l_2 лежат на плоскости, то возможны три различных случая их взаимного расположения: 1) пересекаются (т. е. имеют одну общую точку); 2) параллельны и не совпадают; 3) совпадают.

Выясним, как узнать, какой из этих случаев имеет место, если эти прямые заданы своими уравнениями в общем виде:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке $M(x; y)$, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям системы (12). Следовательно, чтобы найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, надо решить систему уравнений (12). Умножим первое из уравнений (12) на A_2, а второе на A_1 и вычтем первое из второго. Имеем

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y + C_2A_1 - C_1A_2 = 0. \tag{13}$$

Аналогично получаем

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + C_1B_2 - C_2B_1 = 0. \tag{14}$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то из (13) и (14) получаем решение системы уравнений (12):

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \tag{15}$$

— это и есть координаты x и y точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Итак, если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то эти прямые пересекаются.

Если

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \tag{16}$$

то выражения для x и y не имеют смысла. В этом случае прямые l_1 и l_2 параллельны. Действительно, из условия (16) следует, что $-A_1/B_1 - A_2/B_2$, т. е. $k_1 = k_2$ (если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые l_1 и l_2 параллельны оси Oy и, следовательно, параллельны между собой). Условие (16) можно записать в виде

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{17}$$

Здесь один из знаменателей может оказаться равным нулю. Чтобы обойти эту трудность, договоримся всякую пропорцию $a/b = c/d$ *понимать в смысле равенства* $ad = bc$. Тогда обращение в нуль одного из знаменателей в (17) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. В самом деле, если, например, $A_2 = 0$, то, поскольку $B_2 \neq 0$ (A_2 и B_2 не нули одновременно), из равенства $A_1B_2 = A_2B_1$ замечаем, что $A_1 = 0$.

В частности, параллельные прямые могут совпадать. Выясним, каков аналитический признак совпадения прямых l_1 и l_2.

Пусть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{18}$$

Полагая каждое из этих отношений равным q, найдем

$$A_1 = A_2q,\ B_1 = B_2q,\ C_1 = C_2q.$$

Таким образом, первое уравнение (12) получается из второго умножением всех его членов на некоторое число q, т. е. уравнения (12) равносильны. Следовательно, рассматриваемые параллельные прямые совпадают.

Если при выполнении условия (17) хотя бы один из свободных членов уравнений (13) и (14) будет отличен от нуля (или $C_2A_1 - C_1A_2 \neq 0$, или $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$), что кратко записывают так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \tag{19}$$

то уравнения (13) и (14), а значит, и уравнения (12) не будут иметь решений (по крайней мере одно из равенств (13) или (14) будет невозможным). В этом случае параллельные прямые l_1 и l_2 не будут совпадать.

Итак, условием *совпадения двух прямых является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений*.

Допустим, что ни одна из прямых l_1 и l_2 не параллельна оси Oy. Тогда их уравнения можно записать в виде

$$y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2,$$

где

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}. \tag{20}$$

Условие перпендикулярности таких прямых следует из равенства (11), (20) и имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{21}$$

Хотя соотношение (21) получено в предположении, что ни одна из прямых l_1 и l_2 не параллельна оси Oy, оно остается верным, если это условие нарушается.

Пример 1. Прямые $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$ пересекаются, так как $3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \neq 0$. Координаты точки пересечения согласно (15) $x = -1$, $y = 1$.

Пример 2. Прямые $2x - y + 2 = 0$ и $4x - 2y - 1 = 0$ параллельны (они не имеют общей точки), так как выполнено условие (19).

Пример 3. Прямые $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$ совпадают, так как выполнено условие (18).

Пример 4. Прямые $3x - 4y + 8 = 0$ и $4x + 3y - 9 = 0$ взаимно перпендикулярны, так как выполнено условие (21).

7. Нормальное уравнение прямой. Пусть дана какая-нибудь прямая, не проходящая через полюс O (рис. 11). Проведем через полюс прямую, перпендикулярную данной, и обозначим P точку ее пересечения с данной прямой (рис. 11). Пусть α — угол между полярной осью и лучом OP, p — длина отрезка OP. Найдем уравнение данной прямой, считая известными α и p. Пусть $M(r; \varphi)$ — произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника OPM имеем

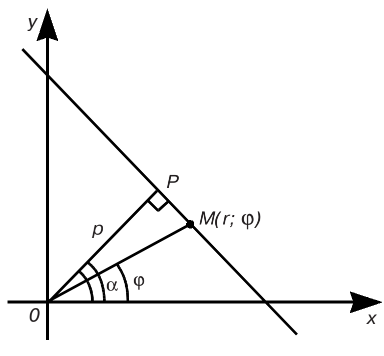


Рис. 11

$$r \cos(\alpha - \varphi) = p. \qquad (22)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в полярных координатах*. Перепишем уравнение (22) в виде

$$r \cos\varphi \cos\alpha + r \sin\varphi \sin\alpha - p = 0.$$

Отсюда, учитывая зависимость между полярными и прямоугольными координатами, получим

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0. \qquad (23)$$

Это уравнение называется *нормальным* уравнением прямой.

Если дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ (A и B не равны нулю одновременно), то его можно привести к виду (23). Действительно, умножив обе части этого общего уравнения на некоторое число $\mu \neq 0$, получим $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$. Выберем μ так, чтобы выполнялись равенства

$$\mu A = \cos\alpha,\ \mu B = \sin\alpha,\ \mu C = -p. \qquad (24)$$

Возведя обе части двух первых равенств (24) в квадрат и почленно складывая, получим

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Так как $A^2 + B^2 \neq 0$ (A и B не равны нулю одновременно), то

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Число μ называется *нормирующим множителем*. Третье из уравнений (24) позволяет решить вопрос о выборе знака числа μ. Так как $p > 0$, то $\mu C < 0$, т. е. знак выбирается противоположным знаку C; если $C = 0$, то для μ можно выбрать любой знак.

Итак, общее уравнение прямой приводится к нормальному виду путем умножения его на нормирующий множитель μ.

Пример. Уравнение прямой $3x - 4y - 5 = 0$ привести к нормальному виду. Нормирующий множитель $\mu = +1/\sqrt{3^2 + 4^2} = 1/5$. Умножая на него обе части данного уравнения, получим

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Для данной прямой, следовательно, $p = 1$, $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$.

8. Расстояние от точки до прямой. Найдем расстояние d от данной точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l (рис. 12), заданной уравнением (23) (под расстоянием d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра, опущенного из M_0 на l).

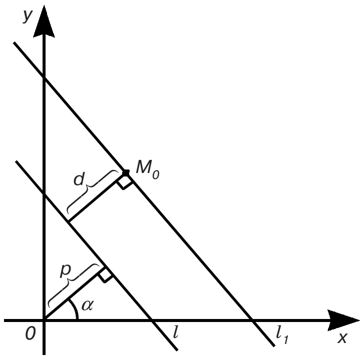


Рис. 12

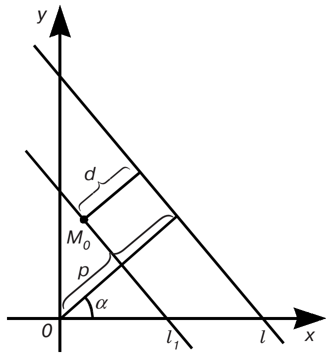


Рис. 13

Проведем через точку M_0 прямую l_1, параллельную l. Запишем нормальное уравнение прямой l_1:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p + d) = 0.$$

Прямая l_1 проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$, поэтому

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - (p + d) = 0.$$

Отсюда

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p. \tag{25}$$

Если точка $M_0(x_0; y_0)$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой l (рис. 13), то аналогично предыдущему установим, что

$$d = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p). \tag{26}$$

Из равенства (25) и (26) следует, что

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \tag{27}$$

Если прямая l задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

то с учетом вывода, сделанного в конце пункта 7, формула (27) принимает вид

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{28}$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-6; 3)$ до прямой $3x - 4y + 15 = 0$. По формуле (28) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot 3 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

1.5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

1. Уравнение окружности. Как известно, *окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности. Выведем уравнение окружности.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — центр окружности, R — ее радиус, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности с текущими координатами x и y (рис. 14).

По определению окружности $M_0M = R$. Отсюда согласно формуле расстояния между двумя точками

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{1}$$

Формула (1) представляет собой уравнение окружности; это — уравнение второй степени относительно x и y. В главе 5 подробно рассмотрим еще три вида линий (эллипс, гипербола, парабола), уравнения которых в прямоугольной системе координат также являются уравнениями второй степени. Эти четыре вида линий называются *кривыми второго порядка*.

Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2}$$

В полярных координатах (r, φ) окружность радиуса R с центром в полюсе изображается уравнением $r = R$.

В тех же координатах (r, φ) окружность радиуса R с центром в точке $(R; 0)$ имеет уравнение $r = 2R\cos\varphi$.

2. Параметрические уравнения линий. Иногда бывает удобно вместо уравнения линии, связывающего прямоугольные координаты x и y, рассматривать так называемые *параметрические уравнения* линии, дающие выражения текущих координат x и y в виде функций от некоторой переменной величины t (параметра). Параметрические уравнения играют важную роль, например, в механике, где координаты x и y движущейся точки $M(x; y)$ рассматриваются как функции времени (*уравнения движения*).

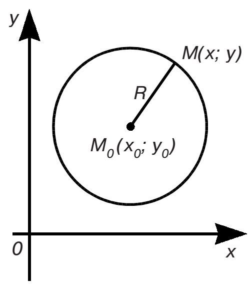


Рис. 14

Задача. Определить траекторию падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скоростью v_0 на высоте y_0 (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

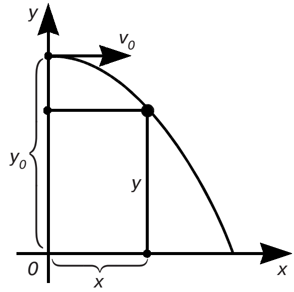


Рис. 15

Решение. Возьмем систему координат так, как показано на рисунке 15, предполагая, что самолет сбрасывает груз в тот момент, когда он пересекает ось Oy. Очевидно, что горизонтальное перемещение груза будет равномерным, с постоянной скоростью v_0:

$$x = v_0 t.$$

Вертикальное перемещение падающего груза под влиянием силы тяжести будет выражаться формулой

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние груза от земли в любой момент времени будет выражаться формулой

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Два уравнения

$$x = v_0 t,$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

будут параметрическими уравнениями траектории. Чтобы исключить параметр t, из первого уравнения находим значение $t = x/v_0$ и подставляем это значение во второе уравнение. Тогда получим уравнение траектории в форме

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $M(0, y_0)$, причем ось Oy служит осью симметрии параболы.

Пример 1. Установим параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

Пусть $M(x; y)$ — любая точка этой окружности, а t — угол AOM (рис. 16). Очевидно,

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t. \qquad (3)$$

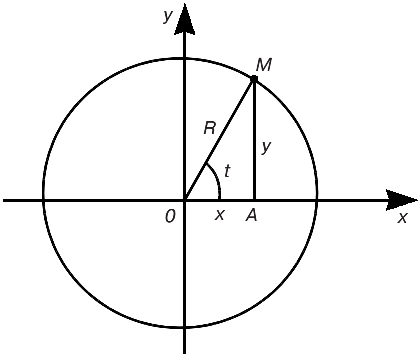


Рис. 16

Это и есть параметрические уравнения окружности. Параметр t может принимать любые значения, но, для того, чтобы точка $M(x;\ y)$ один раз обошла окружность, следует ограничить изменение параметра t неравенством $0 \le t < 2\pi$/ Заметим, что для исключения параметра t из уравнений (3) достаточно возвести эти уравнения в квадрат и сложить их; мы получим при этом уравнение (2) предыдущего пункта.

Пример 2. Рассмотрим линию, являющуюся траекторией фиксированной точки окружности радиуса R, катящейся без скольжения по прямой. Линия эта называется *циклоидой*. Указанную прямую примем за ось Ox прямоугольной системы координат (рис. 17). Предположим, что фиксированная точка при начальном положении окружности находилась в начале координат, а после того как окружность повернулась на угол t, заняла положение M.

Поскольку $x = OP = OK - PK$, $y = MP = CK - CN$ и $OK = \cup MK = Rt$, $PK = MN = R\sin t$, $CK = R$, $CN = R\cos t$, то $x = Rt - R\sin t$, $y = R - R\cos t$, или

$$x = R\,(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t). \tag{4}$$

Уравнения (4) называются *параметрическими уравнениями циклоиды*. При изменении t от 0 до 2π получается одна арка циклоиды.

3. Примеры кривых, заданных уравнениями в полярных координатах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $r = a\varphi$, где a — положительное число, r и φ — полярные координаты. Обозначим через M точку с полярными координатами (r, φ). Если $\varphi = 0$, то и $r = 0$; если φ возрастает, начиная с нуля, то r будет возрастать пропорционально φ. Точка $M\ (r, \varphi)$, таким образом, исходя из полюса, движется вокруг него с ростом φ (в положительном направлении), одновременно удаляясь от него. Множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $r = a\varphi$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 18).

Пример 2. Кривая задаваемая уравнением

$$r = a(1 + \cos\varphi)\ (a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi),$$

называется *кардиоидой*.

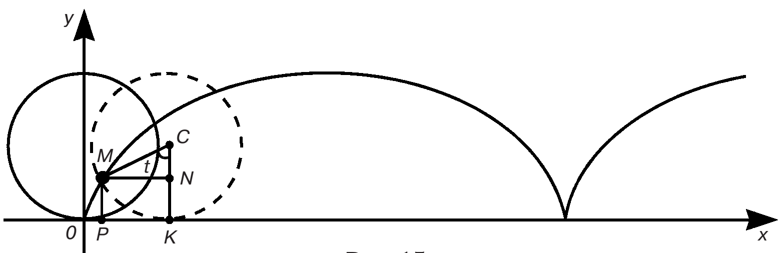


Рис. 17

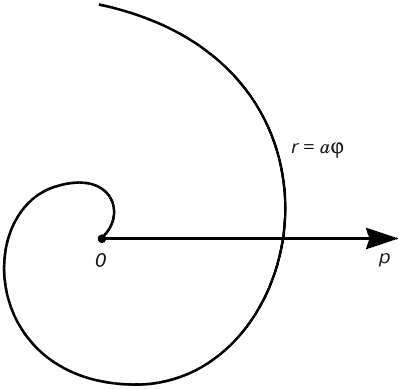


Рис. 18

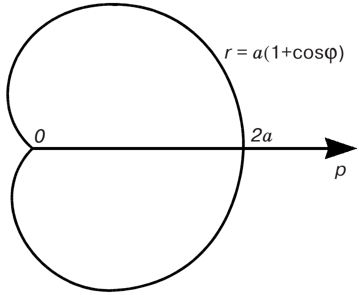


Рис. 19

Составляя таблицу значений φ и r, получим

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2}{3}\pi$	$\pm\frac{5}{6}\pi$	$\pm\pi$
r	$2a$	$\approx 1{,}9a$	$\frac{3}{2}a$	a	$\frac{a}{2}$	$\approx 0{,}1a$	0

Построив точки кардиоиды по значениям φ и r из этой таблицы, можно составить приближенное представление о форме этой кривой (рис. 19).

Пример 3. При выводе нормального уравнения прямой (см. 1.4. п. 7) было получено уравнение прямой в полярных координатах:

$$r\cos(\alpha - \varphi) = p.$$

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Понятие вектора. При изучении различных разделов физики, механики и технических наук встречаются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений. Такие величины называются *скалярными* или, короче, *скалярами*. Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др. Помимо скалярных величин, в различных задачах встречаются величины, для определения которых, кроме числового значения, необходимо знать также их направление. Такие величины называются *векторными*. Физическими примерами векторных величин могут служить смещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на нее сила.

Векторные величины изображаются с помощью векторов.

Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину, т. е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая — за конец. Если A — начало вектора и B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$. Вектор можно обозначить и одной малой латинской буквой с чертой над ней (например, $\bar{a}$). Изображается вектор отрезком со стрелкой на конце (рис. 20). Начало вектора называют *точкой его приложения*. Если точка A является началом вектора $\bar{a}$, то мы будем говорить, что вектор $\bar{a}$ приложен в точке A.

Длина вектора $\overline{AB}$ называется его *модулем* и обозначается символом $|\overline{AB}|$. Модуль вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

Вектор $\bar{a}$, для которого $|\bar{a}| = 1$, называется *единичным*.

Вектор называется *нулевым* (обозначается $\overline{0}$), если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

В этом случае пишут: $\bar{a} = \bar{b}$. Все нулевые векторы считаются равными. Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства (в частности, плоскости). Такой вектор называется *свободным*.

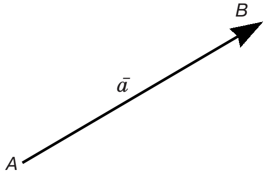


Рис. 20

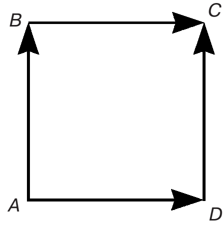


Рис. 21

Пример. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 21). На основании определения равенства векторов можем написать $\overline{AD}=\overline{BC}$ и $\overline{AB}=\overline{DC}$, но $\overline{AB}\neq\overline{AD}$, $\overline{BC}\neq\overline{DC}$, хотя $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|=\left|\overline{BC}\right|=\left|\overline{DC}\right|$..

Два коллинеарных вектора (отличные от нулевых векторов), имеющие равные модули, но противоположно направленные, называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектор $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$. Для вектора $\overline{AB}$ противоположным будет вектор $\overline{BA}$.

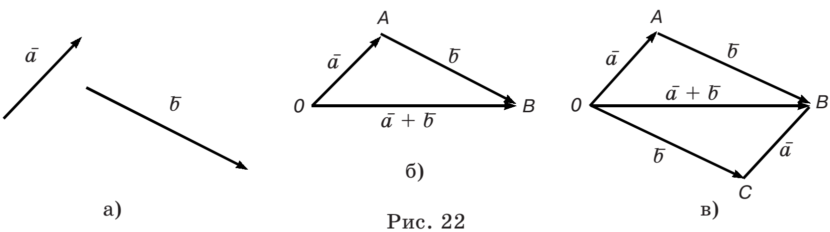
2. Линейные операции над векторами. *Линейными операциями* называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Определение. Пусть $\bar{a}$ и b — два свободных вектора (рис. 22, а). Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA}=\bar{a}$, затем от точки A отложим вектор $\overline{AB}=\bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго, называется *суммой* этих векторов и обозначается $\bar{a}+\bar{b}$ (рис. 22, б).

Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OC}=\bar{b}$. Построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм $OABC$. Вектор $\overline{OB}$, служащий диагональю этого параллелограмма, проведенной из вершины O, является, очевидно, суммой векторов $\bar{a}+\bar{b}$ (рис. 22, в). Из рис 22, в непосредственно следует, что сумма двух векторов обладает переместительным свойством:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$$

Действительно, каждый из векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{b}+\bar{a}$ равен одному и тому же вектору $\overline{OB}$.



а) б) в)

Рис. 22

Понятие суммы векторов, введенное для двух слагаемых векторов, можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых векторов.

Пусть, например, даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 23, а). Построив сначала сумму векторов $\bar{a}+\bar{b}$, а затем прибавив к этой сумме вектор $\bar{c}$, получим вектор $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$. На рис. 23, б $\overline{OA}=a$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{OB}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\overline{BC}=\bar{c}$ и $\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

Из рис. 23, б видно, что тот же вектор $\overline{OC}$ мы получим, если к вектору $\overline{OA}=\bar{a}$ прибавим вектор $\overline{AC}=\bar{b}+\bar{c}$. Таким образом,

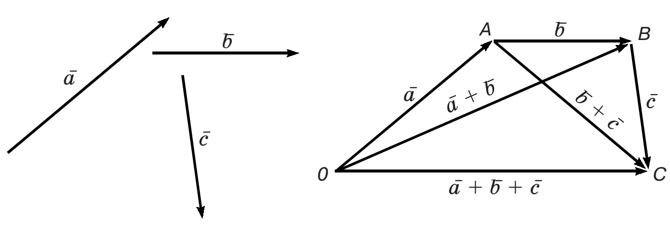
$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}),$$

т. е. сумма векторов обладает *сочетательным* свойством. Поэтому сумму трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ записывают просто $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

Итак, сумму трех векторов можно получить следующим образом. Из произвольной точки O откладывается вектор, равный первому слагаемому вектору. К концу первого вектора присоединяется начало второго; к концу второго — начало третьего. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, является суммой данных векторов. Подобным же образом строится сумма любого конечного числа векторов.

Если при сложении нескольких векторов конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нулевому вектору. Очевидно, что для любого вектора имеет место равенство $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$.

Определение. *Разностью* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором



а) б)

Рис. 23

$\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$. Таким образом, если $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, то $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$.

Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора-разности (рис. 24). Откладываем векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$ из общей точки O. Вектор $\overline{BA}$, соединяющий концы

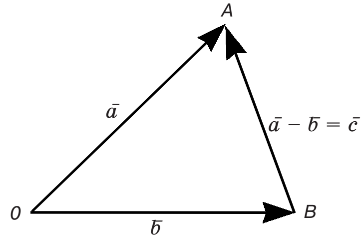


Рис. 24

уменьшаемого вектора $\bar{a}$ и вычитаемого вектора $\bar{b}$ и направленный от вычитаемого к уменьшаемому, является разностью $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$. Действительно, по правилу сложения векторов

$$\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}, \quad \text{или} \quad \bar{b}+\bar{c}=\bar{a}.$$

Определение. *Произведением* $\lambda\bar{a}$ (или $\bar{a}\lambda$) вектора $\bar{a}$ на действительное число λ называется вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, имеющий длину, равную $|\lambda|\ |\bar{a}|$, и то же направление, что и вектор $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и направление, противоположное направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$. Так, например, $2\bar{a}$ есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\bar{a}$, а длину, вдвое большую, чем вектор $\bar{a}$. В случае, когда $\lambda = 0$ или $\bar{a}=\bar{0}$, произведение $\lambda\bar{a}$ представляет собой нулевой вектор. Противоположный вектор $-\bar{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\bar{a}$ на $\lambda = -1$:

$$-\bar{a} = (-1)\bar{a}.$$

Очевидно, что $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$. Пусть дан вектор $\bar{a}$. Рассмотрим единичный вектор $\bar{a}_0$, коллинеарный вектору $\bar{a}$ и одинаково с ним направленный. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$\bar{a} = |\bar{a}|\ \bar{a}_0,$$

т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления. Далее из того же определения следует, что если $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, где $\bar{a}$ — не нулевой вектор, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и, обратно, из коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следует, что $\bar{b}=\lambda\bar{a}$.

Таким образом, два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}.$$

Легко убедиться, что умножение вектора на число обладает распределительным свойством:

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}, \qquad (1)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$$

и сочетательным свойством:

$$\lambda_1(\lambda_2 \bar{a}) = (\lambda_1 \lambda_2)\bar{a}.$$

Справедливость, например, равенства (1) при $\lambda > 0$ следует из того, что при изменении сторон параллелограмма в λ раз в силу свойств подобия его диагональ также изменяется в λ раз (рис. 25).

3. Понятие линейной зависимости векторов. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, … …, $\bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют число $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}. \qquad (2)$$

Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство (2) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Из равенства (2), предполагая, например, что $\lambda_1 \neq 0$, получим

$$\bar{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\bar{a}_3 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\bar{a}_n.$$

Полагая

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3, \ldots, -\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \mu_n,$$

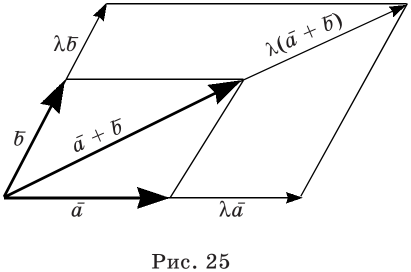


Рис. 25

имеем

$$\bar{a}_1 = \mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \ldots + \mu_n \bar{a}_n. \qquad (3)$$

Выражение

$$\mu_2 \bar{a}_2 + \mu_3 \bar{a}_3 + \ldots + \mu_n \bar{a}_n$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, …, $\bar{a}_n$.

Таким образом, *если несколько векторов линейно за-*

висимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Справедливо и обратное утверждение: *если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных векторов, то все эти векторы линейно зависимы.*

В самом деле, пусть, например, вектор a, является линейной комбинацией векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n$. Тогда имеет место равенство (3). Переписав его в виде $-\bar{a}_1 + \mu_2\bar{a}_2, + \mu_3\bar{a}_3 + \ldots + \mu_n\bar{a}_n = \bar{0}$, убеждаемся в том, что один из коэффициентов (именно коэффициент при $\bar{a}_1$) отличен от нуля. Отсюда в силу определения и вытекает линейная зависимость векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

4. Линейная зависимость векторов на плоскости.

Теорема 1. *Всякие три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ на плоскости линейно зависимы.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что один из векторов является линейной комбинацией остальных. Возможны два случая:

1. Среди данных векторов имеется пара коллинеарных векторов, например $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда (см. п. 2)

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} \quad \text{или} \quad \bar{a} = \lambda\bar{b} + 0\bar{c},$$

т. е. вектор $\bar{a}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

2. Среди данных векторов нет ни одной пары коллинеарных. Допустим, что все три вектора имеют общее начало O (рис. 26). Покажем, что вектор $\bar{a}$ можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых коллинеарен вектору $\bar{b}$, а другой — вектору $\bar{c}$.

Для этого через конец M вектора $\bar{a}$ проведем прямые, параллельные векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, до их пересечения в точках B и C с прямыми, на которых соответственно расположены векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Имеем очевидное равенство

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Так как векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ коллинеарны соответственно векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, то $\overline{OB} = \lambda_1\bar{b}$ и $\overline{OC} = \lambda\bar{c}$.

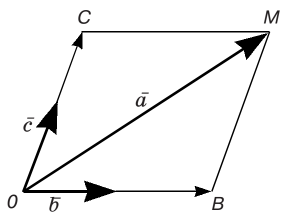


Рис. 26

Поэтому

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{c}, \tag{4}$$

т. е. вектор $\bar{a}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Следствие. *Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они также линейно зависимы.*

В самом деле, пусть даны n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ $(n > 3)$. Так как три вектора на плоскости всегда линейно зависимы, то для векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ имеем $\bar{a}_1 = \mu_2\bar{a}_2 + \mu_3\bar{a}_3$. В таком случае для всех n векторов можно написать

$$\bar{a}_1 = \mu_2\bar{a}_2 + \mu_3\bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4 + \ldots + 0 \cdot \bar{a}_n,$$

т. е. вектор $\bar{a}_1$ есть линейная комбинация остальных векторов.

Что касается двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то, как известно (п. 2), они коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, т. е. когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы. Отсюда непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Для того чтобы два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на плоскости были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.*

Из теорем 1 и 2 следует, что *максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.*

5. Линейная зависимость векторов в пространстве.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Заметим, что если компланарные векторы имеют общее начало, то они, очевидно, лежат в одной плоскости.

Аналогично теореме 1 (п. 4) устанавливается теорема 1 этого пункта.

Теорема 1. *Всякие четыре вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{d}$ в пространстве линейно зависимы.*

Из этой теоремы аналогично следствию из пункта 4 получим

Следствие. *Если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы.*

Аналогично случаю для коллинеарных векторов устанавливается следующее предложение.

Для того чтобы три вектора в пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Отсюда непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Для того чтобы три вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.*

Из теорем 1 и 2 следует, что максимальное число *линейно независимых векторов в пространстве равно трем.*

6. Базис на плоскости и в пространстве.

Определение. *Базисом на плоскости* называются два любых линейно независимых вектора.

Из теоремы 2 (п. 4) следует, что два любых неколлинеарных вектора образуют базис. Пусть $\bar{a}$ — любой вектор на плоскости, а векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис. Так как на плоскости всякие три вектора линейно зависимы, то вектор $\bar{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т. е. выполняется соотношение (4). Поэтому

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{c}. \qquad (5)$$

Если вектор $\bar{a}$ представлен в виде (5), то говорят, что он *разложен по базису*, образованному векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Числа λ_1 и λ_2 называют *координатами вектора $\bar{a}$* на плоскости относительно базиса $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Теорема 1. *Разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является единственным.*

Доказательство. Допустим, что наряду с разложением (5) имеет место разложение

$$\bar{a} = \nu_1 \bar{b} + \nu_2 \bar{c}. \qquad (6)$$

Покажем, что в этом случае $\nu_1 = \lambda_1$, $\nu_2 = \lambda_2$. Действительно, вычитая равенство (6) из равенства (5), получим соотношение

$$\bar{0} = (\lambda_1 - \nu_1)\bar{b} + (\lambda_2 - \nu_2)\bar{c}.$$

(Возможность почленного вычитания равенств (6) и (5) и производимой группировки членов вытекает из свойств линейных операций над векторами (см. п. 2).) Так как векторы базиса $\bar{b}$, $\bar{c}$ линейно независимы, то $\lambda_1 - \nu_1 = 0$ и $\lambda_2 - \nu_2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = \nu_1$ и $\lambda_2 = \nu_2$, т. е. разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{b}$, $\bar{c}$ единственно.

Определение. *Базисом в пространстве* называются три любых линейно независимых вектора.

Из теоремы 2 (п. 5) следует, что три любых некомпланарных вектора образуют базис. Как и в случае плоскости, устанавливается, что любой вектор a разлагается по векторам $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ базиса:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{c} + \lambda_3 \bar{d},$$

причем это разложение единственное.

Числа λ_1, λ_2 и λ_3 называют *координатами вектора* $\bar{a}$ в пространстве относительно базиса $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами — координатами этих векторов.

Теорема 2. *При сложении двух векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ их координаты (относительно любого базиса $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$) складываются. При умножении вектора $\bar{a}_1$ на любое число все его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Пусть

$$\bar{a}_1 = \lambda_1 \bar{b} + \mu_1 \bar{c} + \nu_1 \bar{d}, \quad \bar{a}_2 = \lambda_2 \bar{b} + \mu_2 \bar{c} + \nu_2 \bar{d}.$$

Тогда в силу свойств линейных операций (см. п. 2)

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\bar{b} + (\mu_1 + \mu_2)\bar{c} + (\nu_1 + \nu_2)\bar{d},$$

$$\alpha \bar{a}_1 = (\alpha\lambda_1)\bar{b} + (\alpha\mu_1)\bar{c} + (\alpha\nu_1)\bar{d}.$$

В силу единственности разложения на базису $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ теорема доказана.

7. Проекция вектора на ось и ее свойства.

Определение 1. *Углом между векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол $\varphi(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

Осью называется направленная прямая. Направление прямой на рисунке обычно обозначается стрелкой. Заданное направление оси считается положительным, противоположное — отрицательным.

Рассмотрим ось l, положительное направление которой совпадает с направлением единичного вектора $\bar{l}_0$, расположенного на оси l. Такой вектор называется *ортом оси* l.

Определение 2. *Углом между вектором $\bar{a}$ и осью l* называется угол φ между векторами a и l_0 (рис. 27).

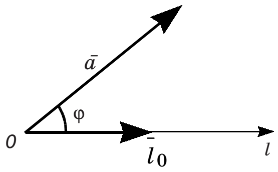


Рис. 27

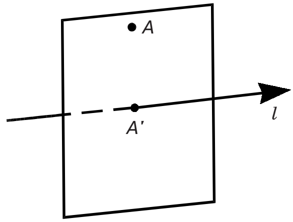


Рис. 28

Определение 3. *Проекцией точки A на ось l* (рис. 28) называется точка A_1, в которой пересекается ось l с плоскостью, перпендикулярной к l, проходящей через точку A.

Определение 4. *Компонентой (составляющей) вектора* $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось l (рис. 29), называется вектор $\bar{a}' = \overline{A_1B_1}$, где A_1, B_1 соответственно проекции точек A, B на l.

Определение 5. *Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось l* ($\text{пр}_l\bar{a}$) называется длина его компоненты $\bar{a}'$ на ось l, взятая со знаком «плюс», если направление компоненты совпадает с направлением оси l, и со знаком «минус», если направление компоненты противоположно направлению оси l.

Если $\bar{a} = \bar{0}$, то полагают $\text{пр}_l\bar{a} = 0$.

Теорема 1. *Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна произведению его модуля на косинус угла φ между этим вектором и осью l:*

$$\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi.$$

Доказательство. Так как вектор $\bar{a} = \overline{OA}$ свободный, то можно предположить, что начало его O лежит на оси l (рис. 30).

Если угол φ острый ($0 \leqslant \varphi < \pi/2$), то направление компоненты $\bar{a}' = \overline{OA_1}$ вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением оси l (рис. 30, *а*).

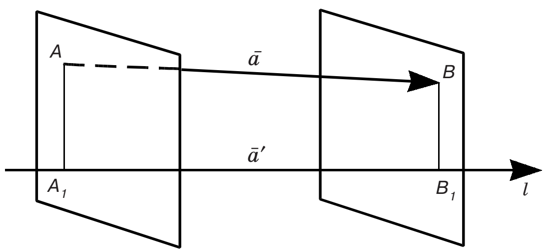
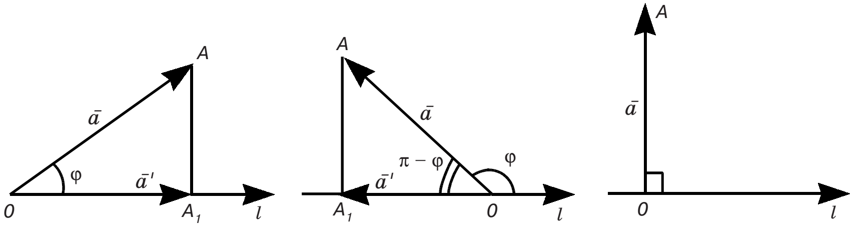


Рис. 29



а)   б)   в)

Рис. 30

В этом случае имеем $\text{пр}_l\bar{a} = +|\overline{OA_1}| = |\bar{a}|\cos\varphi$.

Если же угол φ тупой ($\pi/2 < \varphi \leqslant \pi$) (рис. 30, б), то направление компоненты $\overline{a'} = \overline{OA},$ вектора $\bar{a}$ противоположно направлению оси l. Тогда получаем $\text{пр}_l\bar{a} = -|\overline{OA_1}| = -|\bar{a}|\cos(\pi - \varphi) = |\bar{a}|\cos\varphi$.

Наконец, если $\varphi = \pi/2$ (рис. 30, в), то $\text{пр}_l\bar{a} = 0$ и $\cos\varphi = 0$. Таким образом, снова имеем соотношение $\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.

Следствие 1. *Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если этот угол тупой, равна нулю, если этот угол прямой.*

Следствие 2. *Проекции равных векторов на оду и ту же ось равны между собой.*

Теорема 2. *Проекции векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *на данную ось обладают следующими свойствами:*

$$\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_l\bar{a} + \text{пр}_l\bar{b}, \tag{7}$$

$$\text{пр}_l(\lambda\bar{a}) = \lambda\text{пр}_l\bar{a}. \tag{8}$$

Доказательство. Свойство (7) иллюстрируется рис. 31.

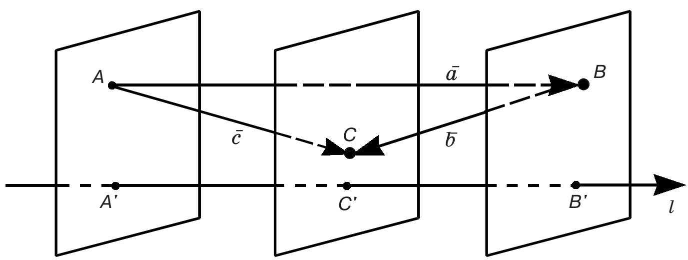


Рис. 31

Докажем свойство (8). Считая, что угол между вектором $\bar{a} = \overline{OA}$ и направлением l равен φ, имеем

при $\lambda > 0$ $\text{пр}_l(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}| \cos\varphi = \lambda|\bar{a}| \cos\varphi = \lambda\text{пр}_l\bar{a}$;

при $\lambda < 0$ $\text{пр}_l(\lambda\bar{a}) = |\lambda\bar{a}| \cos(\pi - \varphi) = -\lambda|\bar{a}| \cos(\pi - \varphi) = \lambda|\bar{a}| \cos\varphi = \lambda\text{пр}_l\bar{a}$

(при $\lambda < 0$ вектор $\lambda\bar{a}$ направлен в сторону, противоположную направлению $\bar{a}$; если $\bar{a}$ образует с l угол φ, то $\lambda\bar{a}$ образует с l угол $\pi - \varphi$).

При $\lambda = 0$ левая и правая части (8) обращаются в нуль.

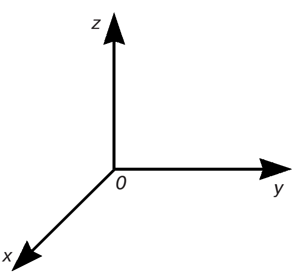
8. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве (координатные оси) с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют *декартову прямоугольную* (кратко — *прямоугольную*) *систему координат в пространстве.* Оси упорядочены, т. е. указано, какая из осей считается первой (она называется осью абсцисс и обозначается Ox), какая — второй (ось ординат Oy) и какая — третьей (ось аппликат Oz).

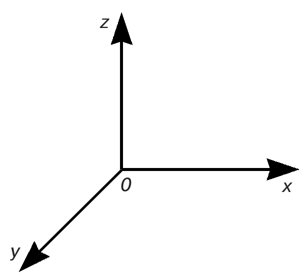
Различают *правую* и *левую* системы декартовых прямоугольных координат (рис. 32, соответственно а, б). В этой книге принята правая система координат (будем называть ее *основной*).

Орты осей Ox, Oy, Oz обозначают соответственно через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Так как векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ некомпланарны, то они образуют базис (см. п. 6), который называется *декартовым прямоугольным базисом.*

В силу результатов п. 6 каждый вектор $\bar{a}$ может быть, и притом единственным способом, разложен по декартовому прямоугольному базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т. е. для каждого вектора найдет-



а)



б)

Рис. 32

ся, и притом единственная, тройка чисел a_x, a_y, a_z, такая, что справедливо равенство

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \qquad (9)$$

Числа a_x, a_y, a_z называются *декартовыми прямоугольными* (или прямоугольными) *координатами вектора* $\bar{a}$.

Запись $\bar{a}(a_x; a_y; a_z)$ означает, что вектор $\bar{a}$ имеет декартовы прямоугольные координаты a_x, a_y, a_z.

Выясним геометрический смысл чисел a_x, a_y, a_z. Используя теоремы 2 и 1 о проекциях (см. п. 7), имеем

$$\text{пр}_{0x}\bar{a} = a_x \text{пр}_{0x}\bar{i} + a_y \text{пр}_{0x}\bar{j} + a_z \text{пр}_{0x}\bar{k} = a_x.$$

Аналогично устанавливаем $\text{пр}_{0y}\bar{a} = \bar{a}_y$, $\text{пр}_{0z}\bar{a} = \bar{a}_z$. Следовательно, *числа* a_x, a_y, a_z *в формуле* (9) *являются проекциями вектора* $\bar{a}$ *на координатные оси* Ox, Oy, Oz *соответственно.*

Если M — произвольная точка в пространстве, то *радиусом-вектором точки* M назовем вектор $\overline{OM}$, имеющий своим началом начало O заданной системы координат, а концом — эту точку.

Определение. *Декартовыми прямоугольными координатами точки* M называются проекции ее радиуса-вектора $\overline{OM}$ на соответствующие координатные оси; проекция на первую координатную ось называется *абсциссой* точки M, на вторую — *ординатой*, на третью — *аппликатой*:

$$x = \text{пр}_{0x}\overline{OM},\ y = \text{пр}_{0y}\overline{OM},\ z = \text{пр}_{0z}\overline{OM}.$$

Символ $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y, z.

Координатные плоскости (плоскости, проходящие через пары координатных осей) делят все пространство на восемь частей, называемых *октантами*, которые нумеруются следующим образом: октант, лежащий над первой четвертью плоскости xOy, — I; лежащий под ней — V; соответственно октанты, лежащие над и под второй четвертью плоскости xOy, — II и VI; над и под третьей четвертью — III и VII; над и под четвертой четвертью — IV и VIII.

Каждому октанту соответствует определенная комбинация знаков координат (см. таблицу).

Отметим, что каждой точке пространства соответствует одна упорядоченная тройка действительных чисел $(x; y; z)$ (ее коор-

Координаты	Октанты							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

динат). Верно и обратное: каждой упорядоченной тройке действительных чисел (x; y; z) соответствует одна точка пространства. Это значит, что в пространстве положение произвольной точки M полностью определяется ее координатами x, y, z.

Пусть задана точка $M(x;\ y;\ z)$. Поскольку координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$ совпадают с проекциями этого вектора на оси координат, т. е. с координатами точки M, то согласно равенству (9) имеем:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

(Если точка M лежит в плоскости xOy, то $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$.)

Пусть теперь заданы две точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Рассмотрим вектор $\overline{M_1M_2}$. Имеем $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$ (рис. 33). Отсюда в силу теоремы 2 (п. 6) получаем

$$\overline{M_1M_2}\ \ (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Итак, *чтобы найти координаты некоторого вектора, достаточно из координат его конца вычесть одноименные координаты его начала.*

Пусть два ненулевых вектора

$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$

коллинеарны. В этом случае (см. п. 2) $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ (λ — скаляр), что в силу следствия 2 из п. 7 равносильно трем равенствам

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{a_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (10)$$

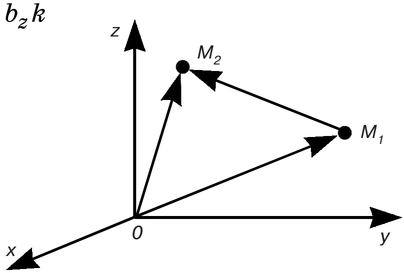


Рис. 33

Это есть *условие коллинеарности векторов*.

Таким образом, *векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны*.

Примечание. В равенстве (10) некоторые из знаменателей могут оказаться равными 0. Напомним, что всякую пропорцию $a/b = c/d$ понимаем в смысле равенства $ad = bc$. Так, например, равенства $a_x/0 = a_y/0 = a_z/2$ означают, что $2a_x = 0 \cdot a_z$, $2a_y = 0 \cdot a_z$, $0 \cdot a_x = 0 \cdot a_y$, т. е. что $a_x = 0$, $a_y = 0$.

Задача. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Требуется найти точку $M(x; y; z)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Очевидно, что $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ или

$$(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} + (z - z_1)\bar{k} = \lambda(x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j} + (z_2 - z)\bar{k}.$$

Отсюда $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$ и наконец,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

2.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства.

Определение. *Скалярным произведением двух векторов* называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a}\bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$. Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен φ, то

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Через $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$ обозначим проекцию вектора $\bar{b}$ на ось с направлением вектора $\bar{a}$.

Так как

$$|\bar{b}| \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} \text{ и } |\bar{a}| \cos\varphi = \text{пр}_{b}\bar{a}$$

(см. 2.1, п. 7), то можно записать

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \text{ пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \text{ пр}_{b}\bar{a},$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось с направлением первого*.

Раскроем физический смысл скалярного произведения. Пусть постоянная сила $\overline{F}$ обеспечивает прямолинейное перемещение $\bar{s} = \overline{MN}$ материальной точки M.

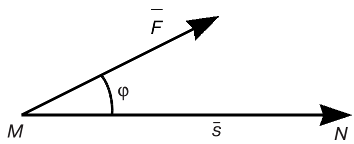


Рис. 34

Если сила $\overline{F}$ образует угол φ с перемещением $\bar{s}$ (рис. 34), то, как известно из физики, работа A силы $\overline{F}$ при перемещении $\bar{s}$ равна.

$$A = |\overline{F}|\,|\bar{s}| \cos \varphi,$$

или согласно формуле (1) $A = \overline{F}\bar{s}$. Таким образом, *работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.*

Скалярное произведение обладает следующими основными свойствами:

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$ (переместительное свойство).

2. $\bar{a}^2 = \bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2$ (3)

($\bar{a}^2$ называется *скалярным квадратом вектора*).

3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ (распределительное свойство).

4. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ (4)

(сочетательное свойство относительно числового множителя).

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из определения скалярного произведения.

Докажем свойство 3. На основании формулы (2) и свойства проекций (2.1, (7)) имеем

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}|\,(\text{пр}_{c}\bar{a} + \text{пр}_{c}\bar{b}) =$$

$$= |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}\bar{b} = \bar{c}\bar{a} + \bar{c}\bar{b} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

При доказательстве свойства 4 ограничимся случаем $\lambda > 0$. Замечая, что при $\lambda > 0$ угол φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен углу между векторами $\lambda\bar{a}$ и $\bar{b}$, получим

$$\lambda(\bar{a}\bar{b}) = \lambda|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi,\quad (\lambda\bar{a})\bar{b} = |\lambda\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi = \lambda|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi,$$

откуда следует равенство (4).

Примечание. Из свойств 1, 3, 4 скалярного умножения и свойств линейных операций над векторами (2.1, п. 2) следует, что векторы можно перемножать скалярно как многочлены.

Из равенства (1) следует, что косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}. \tag{5}$$

Из формулы (5) получаем, что два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *перпендикулярны* (*ортогональны*), т. е. $\varphi = \pi/2$, *тогда и только тогда, когда*

$$\bar{a}\bar{b} = 0. \tag{6}$$

Это утверждение справедливо также и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ нулевой (нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать ортогональным любому вектору).

2. Скалярное произведение векторов в координатной форме. Пусть

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

и

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Перемножая эти векторы как многочлены и учитывая вытекающие из равенств (3) и (6) соотношения

$$\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0, \quad \bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1,$$

будем иметь

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{7}$$

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат*.

Пример. Если $\bar{a}(1; 3; -1)$, $\bar{b}(1; 0; 4)$, то по формуле (7) имеем $\bar{a}\bar{b} = -3$.

Из равенства (7) с учетом формулы (3) имеем

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{8}$$

Отсюда с учетом формул (5) и (7) находим угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (9)$$

Задача. Найти расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Так как (см. 2.1, п. 8).

$$\overline{M_1M_2}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

то согласно формуле (8)

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В п. 1. было отмечено необходимое и достаточное условие ортогональности векторов в виде равенства (6). Согласно формуле (7) это условие можно представить в виде

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (10)$$

3. Направляющие косинусы вектора. Пусть дан вектор $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$. Обозначим углы наклона этого вектора к осям *Ox, Oy* и *Oz* соответственно буквами α, β и γ. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ принято называть *направляющими косинусами вектора* $\bar{a}$. Полагая $\bar{b} = \bar{i}\,(1; 0; 0)$, получим из (9)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (11)$$

Аналогично

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (12)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (13)$$

Из формул (11) — (13) следует

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

т.е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице.*

2) $\dfrac{\cos\alpha}{a_x} = \dfrac{\cos\beta}{a_y} = \dfrac{\cos\gamma}{a_z}$,

т.е. *направляющие косинусы этого вектора пропорциональны его соответствующим проекциям.*

Примечание. Из формул (11) — (13) видно, что проекции любого единичного вектора $\bar{a}_0$ на оси координат соответственно совпадают с его направляющими косинусами и, следовательно,

$$\bar{a}_0 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma.$$

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ (1; 2; 2). По формулам (11) — (13) имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = 2/3, \quad \cos\gamma = 2/3.$$

4. Векторное произведение двух векторов и его основные свойства.

Определение. *Векторным произведением двух векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\bar{c}$, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу, и который перпендикулярен перемножаемым векторам (иначе говоря, перпендикулярен плоскости построенного на них параллелограмма) и направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ вокруг полученного вектора $\bar{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$ (рис. 35).

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Из этого определения следует, что

$$|\bar{c}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$). Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом

$$\bar{a}\times\bar{b} \text{ или } [\bar{a}\,\bar{b}] \text{ или } [\bar{a},\ \bar{b}].$$

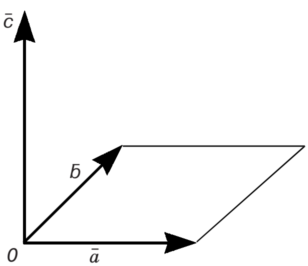


Рис. 35

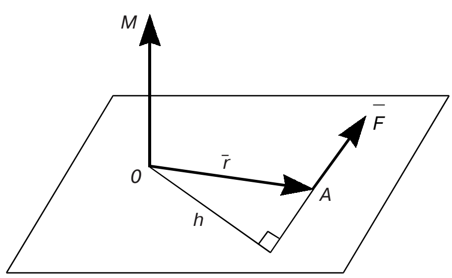


Рис. 36

Выясним физический смысл векторного произведения. В физике момент силы $\overline{F}$ относительно точки O изображают вектором $\overline{OM}$, перпендикулярным плоскости, в которой лежит точка O и вектор $\overline{F}$ (рис. 36). Длину вектора $\overline{OM}$ определяют как произведение длины вектора $\overline{F}$ на плечо h (h — расстояние от точки O до прямой, на которой изображен вектор силы $\overline{F}$), т. е. $\left|\overline{OM}\right| = \left|\overline{F}\right| h$, или $\left|\overline{OM}\right| = \left|\overline{F}\right| \left|\overline{r}\right| \sin(\overline{F}, \overline{r})$, где $\bar{r} = \overline{OA}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\overline{F}$. Таким образом, момент силы F относительно некоторой точки O есть $\overline{F} \times \bar{r}$, *т. е. векторное произведение силы* $\overline{F}$ на радиус-вектор $\bar{r}$ точки приложения силы $\overline{F}$.

Свойства векторного произведения

1. *При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е.*

$$\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a}). \tag{14}$$

В самом деле, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а также и его плоскость не меняются при перестановке $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Поэтому векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $(\overline{b} \times \overline{a})$ имеют одинаковые длины и коллинеарны. Направления же этих векторов противоположны; действительно, если смотреть на плоскость векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с конца вектора $\overline{a} \times \overline{b}$, то кратчайший поворот от $\bar{b}$ к $\bar{a}$ будет казаться происходящим по часовой стрелке. Следовательно, вектор $\overline{b} \times \overline{a}$ должен быть направлен в противоположную сторону.

Заметим, что в случае коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равенство (14) очевидно, так как тогда $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ — нулевые векторы.

Таким образом, векторное произведение не обладает переместительным свойством.

2. $(\lambda \overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda \overline{b}) = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$,

где λ — *скаляр.*

Свойство 2 непосредственно вытекает из смысла произведения вектора на скаляр (см. 2.1, п. 2) и определения векторного произведения.

3. *Векторное произведение подчиняется распределительному закону, т. е.*

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$$

Доказательство этого свойства здесь не приводится (его можно найти, например, в [4]).

4. *Если векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору, то либо равен нулевому вектору один из перемножаемых векторов, либо равен нулю синус угла между ними, т. е. векторы коллинеарны.*

Обратно, *если два ненулевых вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору.*

Таким образом, *для того чтобы два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулевому вектору.*

Отсюда, в частности, следует, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулевому вектору:

$$\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}$$

($\bar{a}\times\bar{a}$ еще называют *векторным квадратом вектора* $\bar{a}$).

5. Смешанное произведение трех векторов и его основные свойства. Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Представим себе, что вектор $\bar{a}$ умножается векторно на $\bar{b}$ и полученный вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ умножается скалярно на вектор $\bar{c}$, тем самым определяется число $(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}$. Оно называется *векторно-скалярным* или *смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Для краткости смешанное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}$. будем обозначать $\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}$ или $(\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c})$.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения $\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}$. Пусть рассматриваемые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ некомпланарны. Построим параллелепипед, на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ как на ребрах. Векторное произведение $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$ есть вектор $\bar{d}$, по длине численно равный площади параллелограмма $OADB$ (основание построенного параллелепипеда), построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма (рис. 37).

Скалярное произведение $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}= \;=\bar{d}\,\bar{c}$ есть произведение модуля вектора $\bar{d}$ и проекции вектора $\bar{c}$ на $\bar{d}$ (см. п. 1, (2)).

Высота построенного параллелепипеда есть абсолютная величина этой проекции.

Следовательно, произведение $|\bar{d}|\ \text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$ по абсолютной величине равно произведению площади основания параллелепипеда на его высоту, т. е. объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

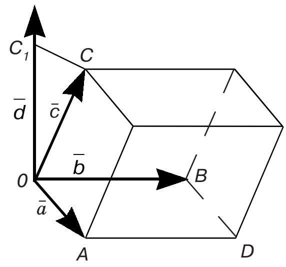


Рис. 37

При этом важно отметить, что скалярное произведение $\bar{d}\ \bar{c}$ дает объем параллелепипеда иногда с положительным, а иногда с отрицательным знаком. Положительный знак получается, если угол между векторами $\bar{d}$ и $\bar{c}$ острый; отрицательный — если тупой. При остром угле между $\bar{d}$ и $\bar{c}$ вектор c расположен по ту же сторону плоскости $OADB$, что и вектор $\bar{d}$, и, следовательно, из конца вектора $\bar{c}$ вращение от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ будет видно так же, как и из конца вектора $\bar{d}$, т. е. в положительном направлении (против часовой стрелки).

При тупом угле между $\bar{d}$ и $\bar{c}$ вектор $\bar{c}$ расположен по другую сторону плоскости $OADB$, чем вектор $\bar{d}$, и, следовательно, из конца вектора $\bar{c}$ вращение от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ будет видно в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Иными словами, произведение $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ положительно, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют систему, одноименную с основной $Oxyz$ (взаимно расположены так же, как оси Ox, Oy, Oz), и оно отрицательно, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют систему, разноименную с основной.

Таким образом, *смешанное произведение* $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$ *есть число, абсолютная величина которого выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *как на ребрах*.

Знак произведения положителен, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ *образуют систему, одноименную с основной, и отрицателен в противном случае.*

Отсюда следует, что абсолютная величина произведения $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ останется та же, в каком бы порядке мы ни брали сомножители $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Что касается знака, то он будет в одних

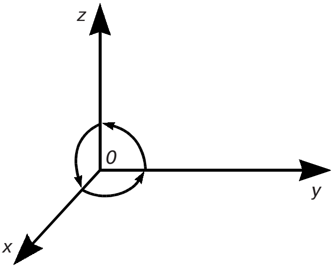


Рис. 38

случаях положительным, в других — отрицательным; это зависит от того, образуют ли наши три вектора, взятые в определенном порядке, систему, одноименную с основной, или нет. Заметим, что у нас оси координат расположены так, что они следуют одна за другой против часовой стрелки, если смотреть *во внутреннюю часть трехгранного угла* (рис. 38). Порядок следования не нарушается, если мы начнем обход со второй оси или с третьей, лишь бы он совершался в том же направлении, т. е. против часовой стрелки. При этом множители переставляются в круговом порядке. Таким образом, получаем следующее свойство:

Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке его сомножителей. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения:

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a} = \bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b} = -(\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}) = -(\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}) = -(\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}).$$

Наконец, из геометрического смысла смешанного произведения непосредственно следует следующее утверждение:

Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c} = 0. \qquad (15)$$

Упражнения

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на стороне CD. Найдите сумму векторов: 1) $\overline{AB} + \overline{AD}$; 2) $\overline{DM} - \overline{AM}$; 3) $\overline{AB} + \overline{CD}$.

[1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{DA}$; 3) $\bar{0}$.]

2. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей. Назовите вектор, равный вектору: 1) $\overline{AB} - \overline{AO}$; 2) $\overline{DO} - \overline{CB}$; 3) $\overline{CO} - \overline{OB}$.

[1) $\overline{OB}$; 2) $\overline{OC}$; 3) $\overline{CD}$.]

3. На материальную точку действуют две силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, направленные под углом $\pi/2$ друг к другу. Найдите модуль равнодействующей, если $|\bar{F}_1| = 3H$, $|\bar{F}_2| = 4H$.

[5Н.]

4. Найти работу силы $\overline{F}$ на перемещении $\bar{s}$, если $|\overline{F}| = 2$, $|\bar{s}| = 5$, $\varphi = (\widehat{\overline{F},\ \bar{s}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

[5.]

5. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}(1;\ 1;\ 1)$.

$[\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.]$

6. Определить и построить вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, если 1) $\bar{a} = 3\bar{i}$ и $\bar{b} = 2\bar{k}$; 2) $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j}$.

$[1) -6\bar{j};\ 2) -2\bar{k}.]$

7. Построить параллелограмм на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и вычислить его площадь.

$[2\sqrt{22}.]$

8. Раскрыть скобки и упростить выражение $\bar{i} \times (\bar{j} + \bar{k}) - \bar{j} \times (\bar{i} + \bar{k}) + \bar{k} \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$.

$[2(\bar{k} - \bar{j}).]$

9. Показать, что $(\bar{a} + \bar{b})[(\bar{a} + \bar{c}) \times \bar{b}] = -(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})$.

10. Показать, что $(\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c})[(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})] = 3\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Глава 3. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

3.1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Понятие о матрице. Таблица чисел a_{ik} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей*. Числа a_{ik} называются ее *элементами*. Это *прямоугольная* матрица. В частности, когда $m = 1$, $n > 1$, мы имеем однострочечную матрицу $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, которую называют *матрицей-строкой*. Если же $m > 1$, $n = 1$, то имеем одностолбцовую матрицу, которую называют *матрицей-столбцом*. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Если в матрице число строк равно числу столбцов ($m = n$), то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называют *порядком* матрицы. Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица второго порядка, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть квадратная матрица третьего порядка.

Матрицу для краткости будем обозначать одной буквой. Например, буквой A.

Две матрицы A и B называются *равными* ($A = B$), если они одинакового размера (т. е. имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов) и их соответствующие элементы равны. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то $A = B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

2. Сложение матриц. Матрицы одинакового размера можно складывать.

Суммой двух таких матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Символически будем записывать так: $A + B = C$.

Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то их суммой называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называются *нуль-матрицей* и обозначается (0) или просто 0.

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел: $A + 0 = A$.

3. Вычитание матриц. Разностью двух матриц A и B одинакового размера называется матрица C, такая, что

$$C + B = A.$$

Из этого определения следует, что элементы матрицы C равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначается разность матриц A и B так: $C = A - B$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Умножение матрицы на число. *Произведением матрицы* A на число λ называется матрица, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы A.

Отсюда следует, что при умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $A\lambda + B\mu$.

На основании определения суммы матриц и умножения матрицы на число имеем

$$A\lambda + B\mu = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu & 3\lambda + \mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

5. Умножение матриц. Рассмотрим правило умножения двух квадратных матриц второго и третьего порядков.

Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как видим, элемент матрицы-произведения, находящийся на пересечении i-й строки и k-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первой матрицы на элементы k-го столбца второй матрицы.

Например, элемент, стоящий во второй строке и первом столбце матрицы произведения AB, равен сумме парных произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B.

Это правило сохраняется для умножения квадратных матриц третьего и более высокого порядка, а также для умножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8 \\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что в результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Рассмотрим еще пример:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4 \\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, как установлено выше

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону:

$$A(BC) = (AB)C.$$

При умножении матриц второго порядка особое значение имеет квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении любой квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка на матрицу E снова получается матрица A.

Действительно,

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$EA = A.$$

Матрица E называется *единичной матрицей*. Единичная матрица n-го порядка имеет вид

$$E = \left(n \text{ строк} \left\{ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix}}_{n \text{ столбцов}} \right. \right).$$

Если в матрице (1), обозначаемой буквой A, сделать все строчки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемую *транспонированной* к матрице A.

3.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Определители второго порядка. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Определителем второго порядка,* соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначают символом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ (кратко } |A|\text{)}.$$

Таким образом,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1)$$

Элементы матрицы A называются *элементами определителя* $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{21}, a_{12} — *побочную*.

Из равенства (1) видно, что для вычисления определителя второго порядка нужно из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2.$$

Пример 2. Имеем

$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$ т. е. определитель единичной матрицы равен единице.

Легко проверяются следующие свойства определителя (с помощью правила вычисления его по формуле (1)).

Величина определителя $|A|$

1) не меняется, если заменить его строки соответствующими столбцами;

2) не меняется, если к элементам какой-либо его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число;

3) меняет знак, если поменять местами его строки или столбцы;

4) увеличивается в k раз, если элементы какого-либо его столбца или строки увеличить в k раз, т. е. общий множитель, имеющийся в строке или столбце, можно выносить за знак определителя;

5) равна нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю;

6) равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны.

2. Определители третьего порядка. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

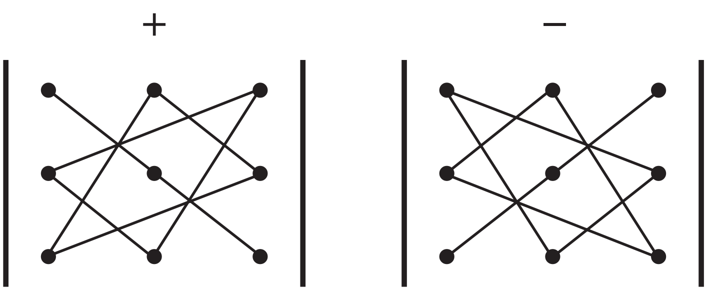
Определение. *Определителем третьего порядка,* соответствующим матрице A, называется число, равное $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ (кратко } |A|).$$

Итак,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2)$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) следует брать со знаком «плюс», какие — со знаком «минус», полезно правило, называемое *правилом треугольника* (см. рис.).



Пример 1. По формуле (2) имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 26 = 0.$$

Пример 2. Очевидно, что

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Все свойства определителей второго порядка (свойства 1–6) остаются справедливыми и для определителей третьего порядка (проверка их идет по формуле (2)).

Определение. *Минором* какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычерчиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Например, минором элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Минор элемента a_{ik} определителя $|A|$ обозначается через M_{ik}.

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$.

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{12} определителя $|A|$ является определитель (3), взятый со знаком «минус». Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать через A_{ik}. Следовательно $A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$.

Теорема 1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Преобразуем правую часть формулы (2). Так как

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

то

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *разложением* определителя $|A|$ по элементам первой строки. Аналогично получается разложение по элементам других строк и столбцов.

Теорема 2 (теорема аннулирования). *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Для определителя $|A|$ покажем, например, что

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0. \tag{5}$$

Раскладывая определитель

$$|\tilde{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

по элементам второй строки, согласно предыдущей теореме имеем

$$|\tilde{A}| = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}.$$

Так как определитель $|\tilde{A}|$ равен нулю (как содержащий две одинаковые строки), то получаем искомое равенство (5).

3. Понятие определителя *n*-го порядка. Свойство определителя третьего порядка, выраженного теоремой 1 (п. 2), допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

В общем случае *определителем n-го порядка*, соответствующим квадратной матрице n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

можно назвать число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения (краткое обозначение $|A|$).

Заметим, что определители любого порядка n обладают всеми полученными выше свойствами (п. 1, 2).

Из свойства 1 (п. 1) определителя следует, что квадратная матрица A и транспонированная к ней матрица A' имеют равные определители, т. е.

$$|A| = |A'|.$$

Пример 1. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 2\cdot 39 = -54.$$

Заметим, что если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя выгодно разложить его по элементам этой строки (столбца).

Если же такой строки (столбца) нет, то, используя свойство 2 (п. 1) определителя, его можно преобразовать так, чтобы он имел такую строку (столбец).

Пример 2. Очевидно, что

$$E = \left(n \text{ строк} \left\{ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}}_{n \text{ столбцов}} \right. \right) = 1.$$

Отметим еще следующий любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т. е. произведение двух не нулевых матриц, может оказаться равным нуль-матрице.

Пример 3. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Обратная матрица. Рассмотрим теперь так называемую *обратную* матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Если A — квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условиям

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Примечание. Из этого определения следует, что если матрица A^{-1} является обратной для A, то и A будет обратной для A^{-1}.

Определение. Если определитель $|A|$ матрицы (6), обозначенной через A (п. 3) равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*; в противном случае матрица A называется *невырожденной*.

Теорема. *Матрица*

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} невырожденной матрицы A, является обратной для A.

Доказательство ради краткости проведем для случая $n = 2$. Умножая матрицу A на матрицу (7), мы получим с использованием известных свойств

$$\begin{pmatrix} a_{11}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{11}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{12}\frac{A_{22}}{|A|} \\ a_{21}\frac{A_{11}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{12}}{|A|} & a_{21}\frac{A_{21}}{|A|}+a_{22}\frac{A_{22}}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{|A|} & \frac{0}{|A|} \\ \frac{0}{|A|} & \frac{|A|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично проводится доказательство и для того случая, когда матрица (7) является первым множителем, а A — вторым.

Из только что установленной теоремы следует, что для того чтобы построить обратную матрицу для квадратной невырожденной матрицы A, нужно сначала построить транспонированную матрицу A', а затем каждый элемент A' заменить его алгебраическим дополнением, деленным на $|A|$.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица. Вычисляем алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$ Аналогично $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = -4$.

Составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделав в этой матрице ее строки столбцами с тем же номером, получим матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

3.3. ВЫРАЖЕНИЕ ВЕКТОРНОГО И СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЕКТОРОВ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

1. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов. Пусть

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Перемножая векторно эти равенства и используя свойства векторного произведения, получим сумму девяти слагаемых

$$\bar{a}\times\bar{b} = a_xb_x(\bar{i}\times\bar{i}) + a_yb_x(\bar{j}\times\bar{i}) + a_zb_x(\bar{k}\times\bar{i}) + a_xb_y(\bar{i}\times\bar{j}) + a_yb_y(\bar{j}\times\bar{j}) -$$

$$+a_zb_y(\bar{k}\times\bar{j}) + a_xb_z(\bar{i}\times\bar{k}) + a_yb_z(\bar{j}\times\bar{k}) + a_zb_z(\bar{k}\times\bar{k}). \qquad (1)$$

Из свойств и определения векторного произведения (2.2, п. 4) следует, что $\bar{i}\times\bar{i} = 0$, $\bar{j}\times\bar{j} = 0$, $\bar{k}\times\bar{k} = 0$

и

$$\bar{i}\times\bar{j} = -(\bar{j}\times\bar{i}) = \bar{k}, \quad \bar{j}\times\bar{k} = -(\bar{k}\times\bar{j}) = \bar{i}, \quad \bar{k}\times\bar{i} = -(\bar{i}\times\bar{k}) = \bar{j}.$$

Поэтому из равенства (1) получаем

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\bar{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\bar{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\bar{k}$$

или

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}. \tag{2}$$

Для удобства запоминания формула (2) записывается в виде определителя третьего порядка (см. 3.2, (4)):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

2. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов. Пусть

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},\quad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},\quad \bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}.$$

Как уже установлено,

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}.$$

Далее по известной формуле (2.2, (7)) для скалярного произведения получаем:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z,$$

или

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом, *смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят соответствующие координаты перемножаемых векторов*.

3.4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Матричная запись и матричное решение системы уравнений первой степени. Покажем, каким образом мы можем использовать матричный аппарат для решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система из n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Числа a_{ik} называются *коэффициентами системы* (1), а числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — *свободными членами*. Система линейных уравнений (1) называется *однородной*, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.
Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы* (1), а ее определитель $|A|$ — *определителем системы* (1).

Решением системы (1) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, …, $x_n = \lambda_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Пусть определитель системы (1) отличен от нуля.

Обозначим матрицу-столбец из неизвестных через X и матрицу-столбец из свободных членов через B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц имеем

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, данную систему (1) можно записать следующим образом:

$$AX = B. \tag{2}$$

Равенство (2) называется матричным уравнением (здесь в роли неизвестного выступает матрица X). Так как по условию $|A| \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части уравнения (2) слева на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения матриц (3.1, п. 5), можно написать

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Но так как $A^{-1}A = E$ (3.2, п. 4) и $EX = X$ (3.1, п. 5), то получаем решение матричного уравнения в виде

$$X = A^{-1}B. \tag{3}$$

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 23, \\ x_2 + 2x_3 & = 13. \end{cases}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $AX = B$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} была найдена ранее (см. 3.2, п. 4).

Теперь согласно равенству (3) имеем

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, получим

$$x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

2. Формулы Крамера. (Крамер Г. (1704–1752) — швейцарский математик.) Решение системы (1) n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять с помощью определителей.

Из равенства (3) согласно правилу умножения матриц имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|}b_1 + \frac{A_{21}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|}b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|}b_1 + \frac{A_{22}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|}b_1 + \frac{A_{2n}}{|A|}b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$x_i = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или согласно теореме 1 из 3.2 (п. 2) (эта теорема остается верной и для определителя n-го порядка; 3.2, п. 3)

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1i-1}b_1a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2i-1}b_2a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{ni-1}b_na_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Запишем короче:

$$x_i = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Здесь Δ — определитель системы (1), а $\Delta^{(i)}$ — определитель, полученный из определителя Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Из самого способа решения ясно, что система (1) имеет единственное решение.

Пример. Система $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$, имеет определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

и потому имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta},$$

где

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3,$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1,$$

т. е.

$$x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Линейная однородная система *n* уравнений с *n* неизвестными. Как уже отмечалось (п. 1), система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

называется однородной. Она является частным случаем системы (1) при $b_1 = 0, \ldots, b_n = 0$. Ясно, что эта система имеет нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Это решение называют *тривиальным* решением однородной системы. Но может случиться, что однородная система (5) имеет и не нулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (5).

Теорема 1. *Если определитель* Δ *однородной системы* (5) *не равен нулю* ($\Delta \neq 0$), *то эта система имеет только тривиальное решение.*

В самом деле, в силу свойства определителей (3.2, п. 1, свойство 5) все определители $\Delta^{(i)} = 0$, поэтому в силу равенств (4) $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 2. *Если система уравнений (5) имеет нетривиальное решение, то ее определитель* Δ *равен нулю* ($\Delta = 0$).

В самом деле, если бы $\Delta \neq 0$, то по теореме 1 система (5) имела бы только одно тривиальное решение.

Справедлива (см., например, [7]) и обратная

Теорема 3. *Если определитель Δ системы (5) равен нулю, то эта система имеет нетривиальное решение.*

Упражнения

1. Найти сумму матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.\right]$

2. Найти матрицу а) $A + 2B$, б) $3A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{а) } \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}.\right]$

3. Вычислить произведение матриц AB, если а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\left[\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} 43 & 10 \\ 49 & 11 \\ 37 & 9 \end{pmatrix}.\right]$

Вычислить указанные определители.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. [26.] 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. [−38.] 6. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. [1.] 7. $\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}$. [2695.]

8. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. [72.] 9. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. [−10.] 10. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. [$-2b^2$.]

11. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. [−240.] 12. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$. [513.]

13. Найти матрицы, обратные данным: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$\left[\text{а) } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};\ \text{б) } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\right]$

14. Найти векторное произведение векторов: 1) $\bar{a}(2; 3; 5)$ и $\bar{b}(1; 2; 1)$; 2) $\bar{a}(2; 5; 1)$ и $\bar{b}(1; 2; -3)$.

[1) $-7\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$; 2) $-17\bar{i}+7\bar{j}-\bar{k}$.]

15. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(6;\ 3;\ -2)$ и $\bar{b}\,(3;\ -2;\ 6)$.

[49.]

16. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 4)$, $C(4;\ 3;\ 2)$.

[$2\sqrt{6}$.]

17. Найти смешанное произведение векторов: 1) $\bar{a}(2;\ -1;\ -1)$, $\bar{b}\,(1;\ 3;\ -1)$, $\bar{c}(1;\ 1;\ 4)$, 2) $\bar{a}(1;\ -1;\ 1)$, $\bar{b}\,(1;\ 1;\ 1)$, $\bar{c}(2;\ 3;\ 4)$.

[1) 33; 2) 4.]

18. Показать, что векторы $\bar{a}(2;\ 5;\ 7)$, $\bar{b}\,(1;\ 1;\ -1)$, $\bar{c}(1;\ 2;\ 2)$ компланарны.

19. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}(2;\ 1;\ 1)$, $\bar{b}\,(2;\ 3;\ 2)$, $\bar{c}(3;\ 3;\ 4)$.

[7.]

20. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$.

[20.]

21. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

[$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.]

22. Решить системы уравнений по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$ [$x = -7,\ y = 5$.]

б) $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6x = 28, \\ x + 2z = 7. \end{cases}$ [$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.]

Глава 4. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. ПЛОСКОСТЬ

1. Геометрическое истолкование уравнения между координатами в пространстве. Известно, что уравнение $f(x, y) = 0$, вообще говоря, определяет на плоскости некоторую линию, т. е. множество всех точек плоскости xOy, координаты которых x и y удовлетворяют этому уравнению. Подобно этому уравнение

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

вообще говоря, определяет в пространстве $Oxyz$ некоторую поверхность, т. е. множество всех точек пространства $Oxyz$, координаты которых x, y и z удовлетворяют уравнению (1). Уравнение (1) называется уравнением этой поверхности, а x, y, z — ее текущими координатами.

Поверхность называется *цилиндрической*, если она может быть образована перемещением прямой параллельно самой себе вдоль некоторой линии L. Эта линия называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а всевозможные положения движущейся прямой — ее *образующими*.

2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и ненулевой вектор $\bar{n}(A; B; C)$. Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\bar{n}$ (его называют *нормальным вектором* этой плоскости).

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y; z)$ этой плоскости. Так как вектор $\overline{M_0M}\,(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ лежит на плоскости, то он перпендикулярен вектору $\bar{n}$ (рис. 39).

Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{n}\,\overline{M_0M} = 0, \tag{2}$$

или в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) и есть искомое.

3. Общее уравнение плоскости. Введя обозначение $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, уравнение (3) можно переписать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

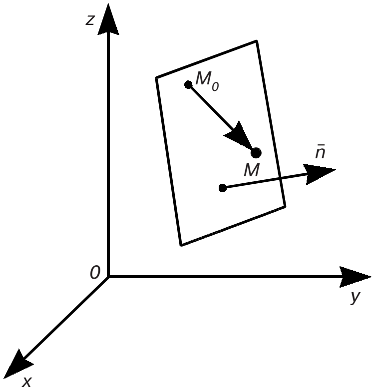


Рис. 39

Следовательно, каждая плоскость в пространстве может быть задана уравнением (4), т. е. уравнением первой степени относительно текущих координат.

Обратно: пусть в уравнении (4) по крайней мере один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Предположим для определенности, что $C \neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать следующим образом:

$$A(x-0)+B(y-0)+C(z+D/C)=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) равносильно уравнению (4). Сравнивая уравнение (5) с уравнением (3), видим, что оно, а следовательно и равносильное ему уравнение (4), является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(0;\ 0;\ -D/C)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n}(A;\ B;\ C)$.

Итак, всякое уравнение первой степени относительно текущих координат, т. е. всякое уравнение вида (4), определяет плоскость.

Уравнение (4) называется *общим уравнением плоскости*.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\ -5;\ 6)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(4;\ 2;\ -3)$. Согласно равенству (3) имеем

$$4(x-1)+2(y+5)-3(z-6)=0, \text{ или } 4x+2y-3z+24=0.$$

4. Неполные уравнения плоскости.

Определение. Общее уравнение (4) называется *полным*, если все его коэффициенты A, B, C, D отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, то уравнение (4) называется *неполным*.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений.

1) $D=0$; уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $A=0$; уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\bar{n}(0;\ B;\ C)$ перпендикулярен оси Ox).

Аналогично уравнение $Ax+Cz+D=0$ $(B=0)$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а уравнение $Ax+By+D=0$ $(C=0)$ — плоскость, параллельную оси Oz.

3) $A=0$, $B=0$; уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOy (ибо эта плоскость параллельна осям Ox и Oy).

Аналогично уравнение $By+D=0$ $(A=0,\ C=0)$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOz, а уравнение $Ax+D=0$ $(B=0,\ C=0)$ — плоскость, параллельную координатной плоскости yOz.

4) $A=0$, $B=0$, $D=0$; уравнение $Cz=0$ определяет координатную плоскость xOy (ибо плоскость $Cz=0$ параллельна координатной плоскости xOy и проходит через начало координат).

Аналогично уравнение $By=0$ $(A=0,\ C=0,\ D=0)$ определяет координатную плоскость xOz, а уравнение $Ax=0$ $(B=0,\ C=0,\ D=0)$ — координатную плоскость yOz.

5. Уравнение плоскости в отрезках. Рассмотрим полное уравнение (4). Так как в таком уравнении ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю, то его можно переписать в виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Полагая для краткости

$$-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c,$$

получаем

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6}$$

Уравнение (6) называется *уравнением плоскости в «отрезках»*, так как знаменатели a, b, c есть величины отрезков, отсекаемые плоскостью от осей координат (рис. 40). В самом деле, точка пересечения плоскости с осью Ox определяется из уравнения этой плоскости (6) при дополнительном условии $y = 0$, $z = 0$, отсюда $x = a$, и, таким образом, величина отрезка, отсекаемая плоскостью (6) на оси Ox, равна a. Аналогично устанавливается, что отрезки, отсекаемые плоскостью (6) на осях Oy и Oz, имеют величины, равные соответственно b и c.

6. Расстояние от точки до плоскости. Если в уравнении (2) в качестве нормального вектора плоскости взять единичный вектор

$$\bar{n}_0=\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|},$$

то получим так называемое *нормальное уравнение плоскости:*

$$\bar{n}_0\,\overline{M_0M}=0 \tag{7}$$

или в координатах

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \tag{8}$$

где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Уравнение (8) удобно при нахождении расстояния от точки до плоскости.

Задача. Найти расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости Q (рис. 41), заданной уравнением (7).

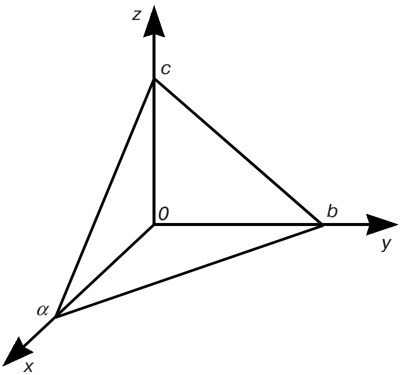


Рис. 40

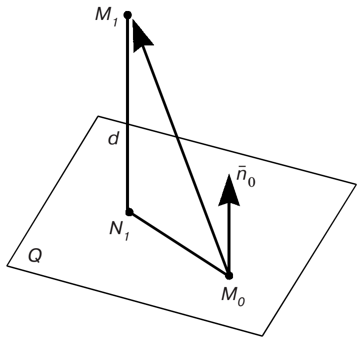


Рис. 41

Из треугольника $M_0M_1N_1$ находим:

$$d = \left| \text{пр}_{\bar{n}_0} \right| = \overline{M_0M} = \bar{n}_0 \, \overline{M_0M_1} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (9)$$

Следовательно, чтобы *найти расстояние от точки до плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения плоскости вместо текущих координат подставить координаты данной точки и взять абсолютную величину полученного результата*.

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(1; 0; -2)$ до плоскости $2x - y + 2z - 4 = 0$. Согласно формуле (9),

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

7. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Пусть уравнения данных плоскостей будут

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D = 0. \qquad (10)$$

Углом между плоскостями (10) называется любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. (Нам достаточно определить один из этих углов, так как их сумма равна π.) Один из них равен углу φ между нормальными векторами к этим плоскостям $\bar{n}_1(A_1; B_1; C_1;)$ и $\bar{n}_2(A_2; B_2; C_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (11)$$

Пример 1. Определить угол между плоскостями $x - z = 0$ и $y - z = 0$. Здесь $\bar{n}_1(1; 0; -1)$, $\bar{n}_2(0; 1; -1)$. По формуле (11) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1)(-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \pi/3$. Итак, один из двух смежных двугранных углов равен $\pi/3$.

Условие параллельности плоскостей (10) совпадает с условием коллинеарности векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$. Следовательно (2.1. (10)), оно имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{12}$$

Аналогично случаю совпадения прямых на плоскости (1.4, п. 6) условие совпадения плоскостей (10) выражается равенствами:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{13}$$

Условие перпендикулярности плоскостей (10) есть вместе с тем условие перпендикулярности нормалей $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, следовательно (2.2, (10)),

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{14}$$

Пример 2. Плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0$ и $3x + 2y - 7z + 32 = 0$ параллельны, но не совпадают, так как выполнено условие (12), но не выполнено условие (13).

Пример 3. Плоскости $2x + 3y - 2z - 4 = 0$ и $13x - 8y + z + 44 = 0$ перпендикулярны, так как выполнено условие (14).

4.2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Геометрическое истолкование двух уравнений между координатами в пространстве. Пусть имеем два уравнения с тремя переменными

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ и } f_2(x, y, z) = 0.$$

Каждое из них, вообще говоря, определяет некоторую поверхность (см. 4.1, п. 1). Множество точек, общих обеим поверхностям, есть вообще говоря, некоторая линия.

Пример. Уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ и $z = a$ определяют окружность, лежащую в плоскости $z = a$, радиуса R с центром на оси Oz в точке $(0; 0; a)$. Заметим, что эту же линию можно задать параметрически тремя уравнениями $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = a$.

В общем случае параметрические уравнения линии имеют вид:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

2. Общие уравнения прямой. Рассмотрим систему уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Каждое из уравнений системы (1) определяет плоскость. Если нормальные векторы $\bar{n}_1(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2;\ B_2;\ C_2)$ этих плоскостей не коллинеарны (т. е. плоскости не параллельны и не совпадают), то система (1) определяет некоторую прямую l как линию пересечения двух плоскостей. Уравнения (1) называются *общими уравнениями прямой*.

3. Канонические уравнения прямой. Пусть дана точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и ненулевой вектор $\bar{s}(m;\ p;\ q)$. Требуется составить уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\bar{s}$ (этот вектор называют *направляющим вектором прямой*). Для этого заметим, что точка $M(x;\ y;\ z)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}\,(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ и $\bar{s}(m;\ p;\ q)$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда координаты этих векторов пропорциональны (2.1, (10)):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}. \tag{2}$$

Уравнения (2) называются *каноническими уравнениями прямой l*.

Пример. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-2;\ -3;\ -1)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{s}(3;\ 2;\ 4)$. Согласно равенствам (2) имеем:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{4}.$$

4. Параметрические уравнения прямой в пространстве. Пусть прямая l задана каноническими уравнениями (2). Примем за параметр t каждое из отношений (2). Так как один из знаменателей в (2) отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то областью изменения параметра t является вся числовая ось $-\infty < t < +\infty$. Получим:

$$x - x_0 = mt,\ y - y_0 = pt,\ z - z_0 = qt,$$

или

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + pt,\ z = z_0 + qt. \qquad (3)$$

Уравнения (3) и есть искомые *параметрические уравнения прямой*.

Пример. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -7)$ и имеющей направляющий вектор $\bar{s}(4; -6; 5)$. Согласно равенствам (3) имеем

$$x = 2 + 4t,\ y = -3 - 6t,\ z = -7 + 5t.$$

5. Угол между прямыми. Пусть в пространстве даны две прямые:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}. \qquad (4)$$

За угол между двумя прямыми принимают один из двух смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-нибудь точку пространства. Один из этих смежных углов равен углу между направляющими векторами $\bar{s}_1(m_1; p_1; q_1)$, $\bar{s}_2(m_2; p_2; q_2)$ данных прямых. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2}\sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}. \qquad (5)$$

Пример 1. Определить угол между прямыми:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Здесь $\bar{s}_1(1; -4; 1)$, $\bar{s}_2(2; -2; -1)$. По формуле (5) получим:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + (-4)(-2) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\varphi = \pi/4$. Следовательно, один из двух смежных углов равен $\pi/4$.

Условие параллельности прямых (4) совпадает с условием коллинеарности векторов $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$. Следовательно (2.1, (10)), оно имеет вид:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}. \qquad (6)$$

Если при этом точка первой прямой, например $M_1(x_1; y_1; z_1)$, удовлетворяет уравнению второй прямой, т. е. если

$$\frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{p_2} = \frac{z_1 - z_2}{q_2}, \tag{7}$$

то эти прямые совпадают.

Условие перпендикулярности прямых (4) есть вместе с тем условие перпендикулярности их направляющих векторов $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$. Следовательно (2.2, (10)),

$$m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0. \tag{8}$$

Пример 2. Прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4}$ параллельны, но не совпадают, так как выполняется условие (6), но не выполняется условие (7).

Пример 3. Прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{4}$ совпадают, так как наряду с выполнением условия (6) выполняется условие (7).

6. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Пусть дана прямая

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q} \tag{9}$$

и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{10}$$

Прямая (9) параллельна плоскости (10) в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой $\bar{s}(m; p; q)$ перпендикулярен к нормальному вектору данной плоскости $\bar{n}(A; B; C)$ (рис. 42).

Отсюда получаем условие параллельности прямой (9) и плоскости (10):

$$Am + Bp + Cq = 0. \tag{11}$$

Прямая (9) перпендикулярна к плоскости (10) в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой кол-

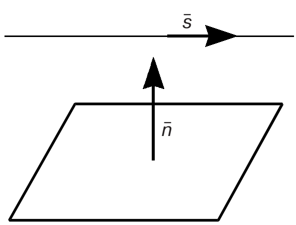


Рис. 42

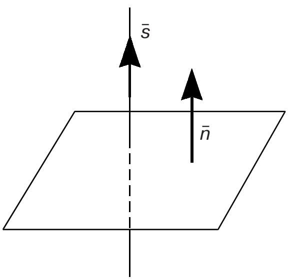


Рис. 43

линеарен нормальному вектору данной плоскости (рис. 43). Отсюда получаем условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{p}=\frac{C}{q}. \tag{12}$$

Рассмотрим особо случай принадлежности прямой (9) плоскости (10). Эти условия выражаются двумя равенствами:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{13}$$

$$Am + Bp + Cq = 0,$$

первое из которых (13) означает, что точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через которую проходит данная прямая, принадлежит плоскости (10), а второе есть условие параллельности прямой (9) и плоскости (10).

Глава 5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами эллипса*) есть величина постоянная, равная $2a$.

Выведем уравнение эллипса. Для этого выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2 (расстояние между фокусами обозначим через $2c$), а начало координат находилось в середине отрезка F_1F_2 (рис. 44). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Рис. 44

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Согласно определению эллипса, имеем:

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

или по формуле расстояния между двумя точками запишем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Это и есть уравнение эллипса. Приведем его к каноническому (т. е. простейшему) виду. Имеем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

откуда

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \qquad (1)$$

Возведем теперь в квадрат обе части равенства (1):

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

откуда

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Заметим, что $a^2 - c^2 > 0$, так как $2a > 2c$, или $a > c$ (сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны; случай $2a = 2c$ естественно исключить, так как тогда получаем совокупность всех точек M, для которых $MF_1 + MF_2 = F_1F_2$, т. е. отрезок F_1F_2). Поэтому, обозначив $a^2 - c^2$ через b^2, получаем:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Деля обе части последнего равенства на a^2b^2, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Эллипс, отвечающий уравнению (2), изображен на рис. 44.

Так как уравнение (2) содержит текущие координаты x и y только в четных степенях, то при замене x на $-x$, а y на $-y$ это уравнение не изменится, т. е. эллипс симметричен относительно обеих осей координат. Из уравнения (2) при $y = 0$ получаем: $x = \pm a$, т. е. эллипс пересекает ось Ox в двух точках: $A(a; 0)$ и $A_1(-a; 0)$; при $x = 0$ получаем: $y = \pm b$, т. е. эллипс пересекает ось Oy в двух точках: $B(0; b)$ и $B_1(0; -b)$. Эти четыре точки называются *вершинами* эллипса. Отрезок A_1A называется *большой осью* эллипса, а отрезок B_1B — его *малой осью*. Следовательно, a — длина большой полуоси эллипса, b — длина его малой полуоси.

В частном случае, когда $a = b$, уравнение (2) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность с центром в начале координат. В этом случае $c = 0$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси, т. е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{3}$$

Так как $c < a$, то для любого эллипса $0 \leqslant \varepsilon < 1$ (случай $\varepsilon = 0$ соответствует окружности). Эксцентриситет характеризует степень сжатия эллипса. Действительно, из (3) и того, что $b^2 = a^2 - c^2$, следует:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что чем больше ε, тем меньше отношение b/a и тем больше вытянут эллипс.

Эксцентриситет (ε), длина полуосей (a и b), расстояние между фокусами ($2c$) — параметры, которые полностью определяют эллипс с центром в начале координат.

Пример. Найти параметры эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 4$. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Отсюда следует, что $a = 8$, $b = 6$, $c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами гиперболы*) есть величина постоянная, равная $2a$.

Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами F_1 и F_2 (рис. 45).

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда, по определению, $MF_1 - MF_2 = 2a$ или $MF_2 - MF_1 = 2a$. Эти условия, определяющие гиперболу, можно записать в виде:

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Заметим, что $a < c$, так как $2a < 2c$ (разность двух сторон треугольника меньше его третьей стороны). Если $a = c$, то мы получаем точки M, для которых $MF_1 - MF_2 = F_1F_2$, или $MF_2 - MF_1 = F_1F_2$, т. е. совокупность тех точек прямой, проходящей через фокусы, которые лежат вне отрезка F_1F_2. Поэтому случай $2a = 2c$ естественно исключить.

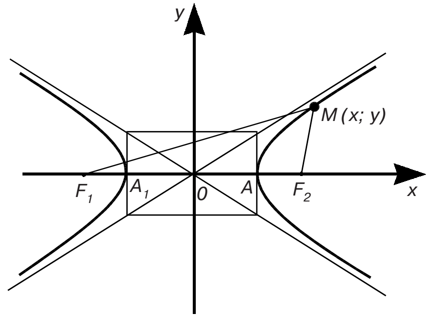


Рис. 45

Далее вывод канонического уравнения гиперболы проводится аналогично выводу канонического уравнения эллипса. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Гипербола, отвечающая уравнению (1), изображена на рис. 45. Подобно эллипсу, гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Она состоит из двух частей, которые называются ее *ветвями*. Из уравнения (1) при $y = 0$ получаем $x = \pm a$, т. е. гипербола пересекает ось Ox в двух точках: $A(a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$, называемых *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A называется *действительной* осью гиперболы.

Прямые $y = \pm(b/a)x$ называются *асимптотами* гиперболы. При увеличении x по абсолютной величине ветви гиперболы все ближе прилегают к своим асимптотам. Для построения асимптот гиперболы целесообразно предварительно построить прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям и с центром в начале координат (такой прямоугольник называется *основным* прямоугольником гиперболы).

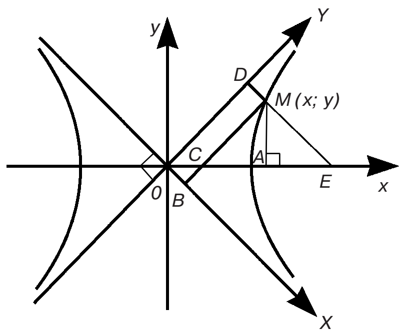


Рис. 46

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\varepsilon = c/a$. Так как $a < c$, для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Учитывая, что $b^2 = c^2 - a^2$, имеем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что, чем меньше эксцентриситет гиперболы, т. е. чем ближе он к единице, тем больше вытянут основной прямоугольник по оси Ox.

Если у гиперболы (1) $a = b$, то она называется *равносторонней* (или *равнобочной*) и ее уравнение имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{2}$$

Асимптотами для равносторонней гиперболы (2) служат взаимно перпендикулярные прямые $y = \pm x$. Поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат (OX — за ось абсцисс, OY — за ось ординат) и рассматривать эту равностороннюю гиперболу по отношению к этим новым осям. Взяв на указанной гиперболе произвольную точку $M(x; y)$ (рис. 46), выразим новые координаты X и Y точки M через старые x и y. Из рис. 46 видно, что

$$X = X_B = x_C \cos\frac{\pi}{4} = (x_A - y)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \tag{3}$$

$$Y = Y_D = x_E \cos\frac{\pi}{4} = (x_A + y)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y). \tag{4}$$

Перемножив равенства (3) и (4) и приняв во внимание равенство (2), получаем:

$$XY = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}a^2,$$

или, полагая для краткости $a^2/2 = m$, $XY = m$.

Следовательно, уравнению $xy = a$, где $a > 0$, соответствует равносторонняя гипербола, имеющая своими асимптотами оси координат и лежащая в I или III квадрантах (рис. 47). Легко понять, что при $a < 0$ эта гипербола лежит во II и IV квадрантах (рис. 48).

Пример. Найти параметры (a, b, c, ε) гиперболы, заданной уравнением $x^2 - 4y^2 = = 36$. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду

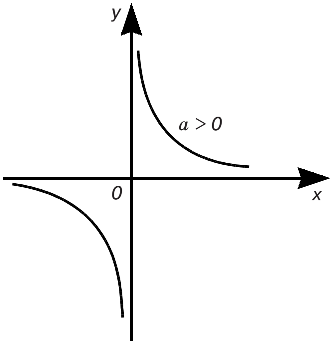


Рис. 47

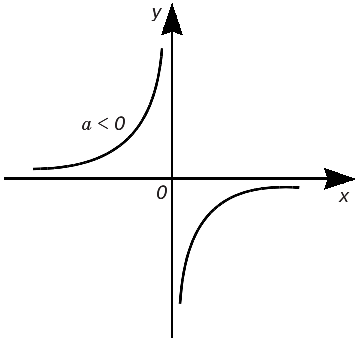


Рис. 48

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$. Отсюда следует, что $a=6$, $b=3$, $c=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm (1/2)x$.

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (называемой *фокусом параболы*) и от данной прямой l (называемой *директрисой параболы*; предполагается, что F не лежит на l).

Для вывода канонического уравнения параболы проведем ось Ox прямоугольной системы координат через фокус F перпендикулярно директрисе, начало координат O поместим на равных расстояниях от фокуса и директрисы (рис. 49). Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через p (оно называется *параметром параболы*). В этом случае фокус будет иметь координаты $F(p/2; 0)$, *а уравнение директрисы будет* $x = -p/2$.

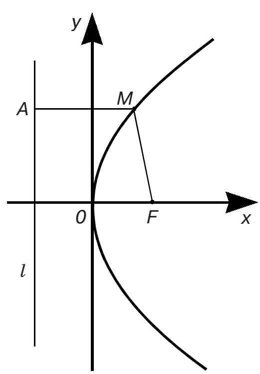


Рис. 49

Возьмем произвольную точку $M(x; y)$ параболы. Согласно определению параболы имеем:

$$MF = MA$$

(точка A имеет координаты $(-p/2; y)$), или по формуле расстояния между двумя точками

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

и окончательно

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Формула (1) и есть каноническое уравнение параболы. Парабола, отвечающая уравнению (1), изображена на рис. 49.

Уравнение (1) имеет смысл только для неотрицательных значений x, т. е. все точки параболы лежат в I и IV квадрантах. Так как уравнение (1) содержит y^2, то парабола симметрична относительно оси Ox. *Вершиной параболы* называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии. При возрастании x значения y возрастают по абсолютной величине. В отличие от гиперболы парабола не имеет асимптот. Ось симметрии параболы называется *осью параболы*. Парабола, определяемая уравнением (1), имеет ось, совпадающую с осью Ox.

Примечание. Очевидно, что каждому из уравнений $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) соответствует парабола, по форме тождественная с параболой (1),

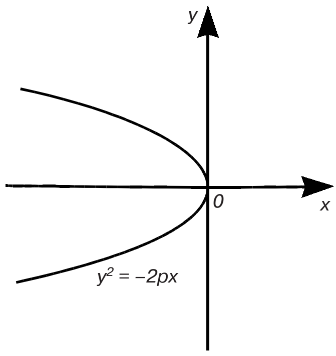


Рис. 50

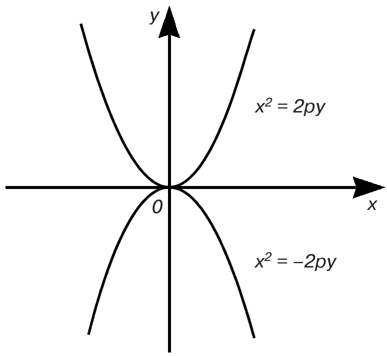


Рис. 51

но иначе расположенная. На рис. 50 и 51 изображены эти параболы.

К параболам, например, симметричным относительно оси Oy, относятся также кривые, заданные уравнениями $x^2 = 2p(y - c)$, $x^2 = -2p(y + c)$, $c > 0$, $p > 0$ (рис. 52).

П р и м е р. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(9; 3)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать ее каноническое уравнение.

Подставляя координаты точки A в уравнение (1), найдем, что $p = 1/2$. Значит, уравнение искомой параболы $y^2 = x$.

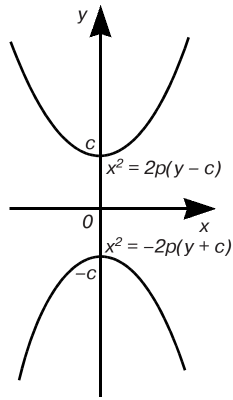


Рис. 52

Упражнения

1. Написать каноническое уравнение эллипса, если даны его полуоси $a = 3$ и $b = 4$.

$$\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.\right]$$

2. Проверить, лежат ли на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ точки $A(0; 2)$, $B(3; 0)$, $C(1; 2)$.

[A и B лежат, C не лежит.]

3. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти его полуоси и расстояние между фокусами.

[$a = 5$; $b = 3$; $2c = 8$.]

4. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ и точка на нем с абсциссой, равной 3. Найти ее ординату.

[$y_1 = 3$, $y_2 = -3$.]

5. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

[16 кв. ед.]

6. Дан эллипс $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. Найти длины осей, координаты вершин и фокусов и эксцентриситет.

[$2a = 26$, $2b = 24$, $A_1(13; 0)$, $A_1(-13; 0)$,

$B_1(0; 12)$, $B_2(0; -12)$, $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$, $\varepsilon = 5/13$.]

7. Составить уравнение эллипса, если все его вершины находятся в точках $A_1(8; 0)$ и $A_2(-8; 0)$, а фокусы — в точках $F_1(5; 0)$ и $F_2(-5; 0)$.

$$\left[\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.\right]$$

8. Написать уравнение директрисы и найти координаты фокуса параболы $y^2 = 4x$.

[$x = -1$, $F(1; 0)$.]

9. Написать уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые: а) $x = -2$; б) $x = 3$.

[а) $y^2 = 8x$; б) $y^2 = -12x$.]

10. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(4; -2)$.

[$y^2 = x$.]

Глава 6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

6.1. ЭЛЛИПСОИД, ГИПЕРБОЛОИДЫ И ПАРАБОЛОИДЫ

1. Эллипсоид и гиперболоиды. *Эллипсоидом* (рис. 53) называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением эллипсоида*. Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*.

Из уравнения (1) видно, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат — центром симметрии. Точки пересечения осей координат с эллипсоидом называются *вершинами эллипсоида*.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости xOy; пусть это будет плоскость $z = h$ и пусть при этом $|h| < c$. Тогда линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h. \qquad (2)$$

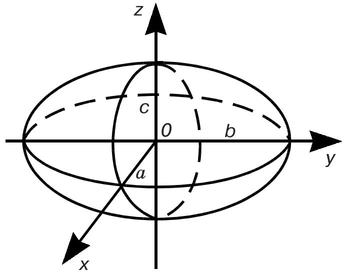


Рис. 53

Обозначив через k^2 положительное число $1-(h^2/c^2)$, уравнения (2) перепишем в виде

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1, \quad z=h.$$

Мы видим, что сечение эллипсоида (1) плоскостью $z = h(|h| < c)$

представляет собой эллипс с полуосями ak и bk, уменьшающимися с увеличением $|h|$; при $|h|=c$ этот эллипс стягивается в точку — вершину эллипсоида. Совершенно аналогичная картина выявляется при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz. Отметим только, что сама плоскость xOz пересекает эллипсоид по эллипсу, который определяется уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0,$$

плоскость yOz — по эллипсу, который определяется уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0.$$

Если две полуоси эллипсоида равны, например $a = b$, то получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Пересекая этот эллипсоид плоскостью $z = h$, параллельной плоскости xOy, получим окружность:

$$x^2+y^2=\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)a^2, \quad z=h$$

с центром на оси Oz. Поэтому такой эллипсоид может быть получен вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

расположенного в плоскости xOz, вокруг оси Oz. Эллипсоид (3) называется *эллипсоидом вращения*.

Если же все три полуоси эллипсоида (1) равны $a = b = c$, то получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

т. е. *сферу*, которая, таким образом, оказывается частным случаем эллипсоида.

Однополостным гиперболоидом (рис. 54) называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4}$$

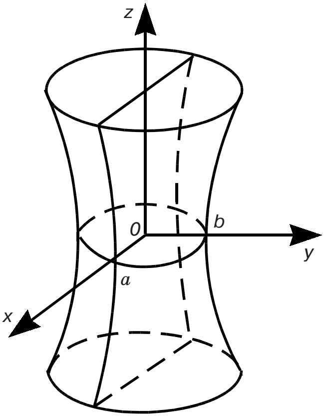


Рис. 54

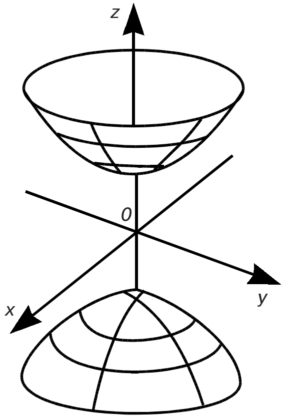


Рис. 55

а двуполостным гиперболоидом (рис. 55) — поверхность, определяемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) называются *каноническими уравнениями гиперболоидов*. Величины a, b, c называются *полуосями* однополостного (двуполостного) гиперболоида. Оба гиперболоида имеют координатные плоскости симметрии, а начало координат — центр симметрии.

Отметим некоторые сечения гиперболоидов плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, однополостный гиперболоид (4) плоскость $z = h$ пересекает по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h,$$

плоскость $y = h$ ($|h| \neq b$) — по гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}, \quad y=h,$$

плоскость $y = b$ — по двум прямым:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=b.$$

По аналогии с эллипсоидом, если полуоси a и b гиперболоида (однополостного или двуполостного) равны, то он называется *гиперболоидом вращения* и получается вращением около оси Oz гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0$$

в случае однополостного гиперболоида и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad y=0$$

в случае двуполостного гиперболоида.

2. Параболоиды. *Эллиптическим парабалоидом* (рис. 56) называется поверхность, которая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяется уравнением

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \tag{6}$$

а *гиперболическим параболоидом* (рис. 57) — поверхность, определяемая уравнением

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) называются *каноническими уравнениями параболоидов*.

Плоскости xOz и yOz являются плоскостями симметрии параболоидов. Пересечение этих плоскостей (ось Oz) называется *осью параболоида*, а пересечение оси Oz с поверхностью параболоида — *вершиной*.

Оба параболоида (эллиптический и гиперболический) плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и

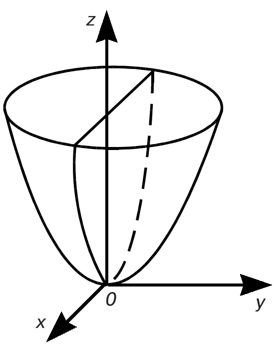


Рис. 56

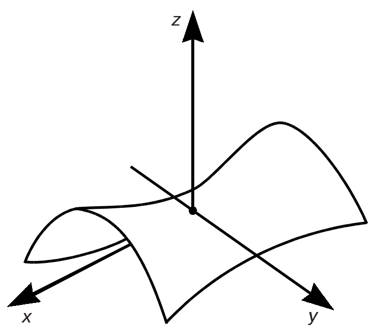


Рис. 57

yOz, пересекаются по параболам. Так, плоскость $x = h$ пересекает эллиптический параболоид по параболе:

$$z - \frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = h.$$

Из уравнения (6) следует, что плоскость $z = h$ ($h > 0$), параллельная плоскости xOy, пересекает эллиптический параболоид по эллипсу, а из уравнения (7) следует, что плоскость $z = h$ ($h \neq 0$) пересекает гиперболический параболоид по гиперболе. Плоскость xOy пересекает гиперболический параболоид по двум прямым.

При $a = b$ эллиптический параболоид называется *параболоидом вращения*. Он получается при вращении параболы $z = x^2/a^2$, $y = 0$, около оси Oz.

6.2. ЦИЛИНДРЫ И КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Цилиндры второго порядка. *Цилиндры второго порядка* определяются в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнениями:

а) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

(*эллиптический цилиндр*, в частности при $a = b$ *круговой*);

б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*гиперболический цилиндр*); (2)

в) $y^2 = 2px$ (*параболический цилиндр*). (3)

Уравнения (1) — (3) называются *каноническими уравнениями цилиндров*. Уравнения (1) — (3) не содержат переменной z. На плоскости xOy уравнение (1) определяет эллипс с полуосями a и b. Если точка (x, y) лежит на эллипсе, то при любом z точка (x; y; z) лежит на поверхности (1). Совокупность таких точек есть поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz и пересекающей эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в плоскости xOy.

Этот эллипс называют *направляющей линией* данной поверхности, а все возможные положения движущейся прямой — *образующими*.

Вообще поверхность, описываемая прямой, остающейся параллельной некоторому заданному направлению и пересекающей данную линию L, называется *цилиндрической*. Поверхность (1) изображена на рис. 58.

В случае гиперболического и параболического цилиндров ((2) и (3)) направляющими линиями поверхностей являются гипербола и парабола, а образующими — прямые, параллельные оси Oz и проходящие через гиперболу и параболу в плоскости xOy. Поверхности (2) и (3) изображены на рисунках 59 и 60.

2. Конус второго порядка. *Конусом второго порядка* или, кратко, *конусом* (рис. 61) называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *каноническим уравнением конуса*. Эта поверхность симметрична относительно координатных плоскостей. Начало координат, являющееся центром симметрии, принадлежит этой поверхности и называется *вершиной* конуса. Сечениями конуса плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ являются прямые $z = \pm(c/b)y$ и $z = \pm(c/a)x$.

В плоскости $z = h$ ($h \neq 0$) имеем эллипс $\frac{x^2}{a_*^2}+\frac{y^2}{b_*^2}=1$ с полуосями $a^* = a|h|/c$, $b^* = b|h|/c$. Если $a = b$, то конус называется *кону-*

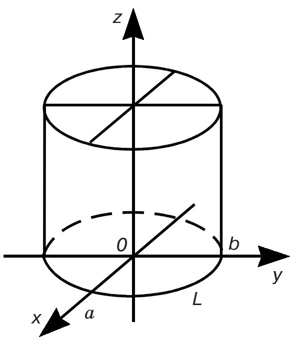


Рис. 58

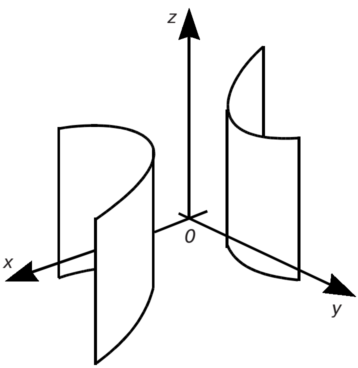


Рис. 59

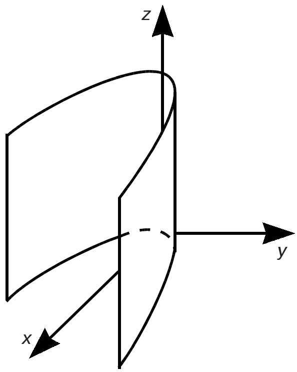


Рис. 60

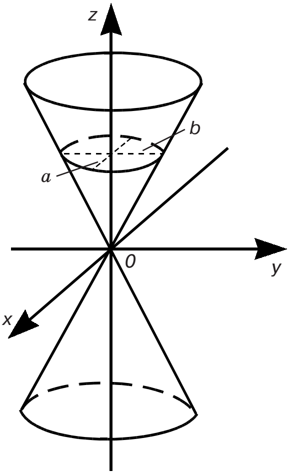


Рис. 61

сом вращения. Для конуса вращения в плоскости $z = h$ ($h \neq 0$) имеем окружность $x^2 + y^2 = a_*^2$.

Упражнения

1. Составить уравнение поверхности, полученной от вращения прямой линии $y = x$ вокруг оси Ox.

[$x^2 = y^2 + z^2$.]

2. Составить уравнение линии пересечения конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ с плоскостью $z = c$.

$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=c.\right]$

3. Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$?

[Эллипсоид, полученный от вращения вокруг оси Oz эллипса $x^2+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}=1, \quad y=0.$]

4. Какую поверхность представляет уравнение $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$?

[Однополостный гиперболоид, полученный от вращения вокруг оси Oz гиперболы $x^2 - z^2 = 1$, $y = 0$.]

Раздел II
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 7. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Действительные числа. Будем считать, что нам известны основные свойства *целых* чисел $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Число x называется *рациональным*, если его можно представить как частное двух целых чисел m и n $(n \neq 0)$: $x = m/n$. Любое рациональное число x представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Число x называется *иррациональным*, если оно представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби $x = a_0$, $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ (например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и т.д.). Каждое иррациональное число можно с любой заданной степенью точности приблизить рациональными числами; для этого достаточно брать в десятичном разложении этого числа конечное множество знаков после запятой. Поэтому на практике при различных измерениях оперируют рациональными числами. Но в общих математических законах и формулах нельзя обойтись без иррациональных чисел (например, формула длины окружности $l = 2\pi R$ включает иррациональное число π).

Множество (совокупность) всех рациональных и иррациональных чисел вызывают *множеством действительных чисел*. Действительные числа изображаются на числовой оси Ox точками (рис. 62). При этом каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и каждой точке оси соответствует определенное действительное число. Поэтому вместо слов «действительное число» можно говорить «точка».

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

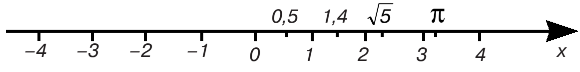


Рис. 62

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения абсолютной величины числа вытекают свойства 1 и 2.

1. $|-x| = |x|$.

2. $-|x| \le x \le |x|$.

3. *Неравенства* $|x| \le a$ и $-a \le x \le a$ *равносильны.*

Докажем свойство 3. Из $|x| \le a$ и свойства 2 имеем $x \le a$. В то же время $|x| \le a$ равносильно $-a \le -|x|$, откуда с учетом свойства 2 следует $-a \le x$. Таким образом, получаем $-a \le x \le a$. Обратно: из неравенства $-a \le x \le a$ вытекает, что одновременно $-x \le a$ и $x \le a$, т.е. по определению абсолютной величины $|x| \le a$.

4. *Модуль сумма двух действительных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:* $|x + y| \le |x| + |y|$.

Действительно, если $x + y \ge 0$, то по определению абсолютной величины и свойству 2 $|x + y| = x + y \le |x| + |y|$. Если $x + y < 0$, то $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \le |x| + |y|$.

Примечание 1. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

5. *Модуль разности двух действительных чисел больше или равен разности модулей этих чисел:* $|x - y| \ge |x| - |y|$.

По свойству 4 имеем

$$|x| = |y + (x - y)| \le |y| + |x - y|,$$

откуда

$$|x - y| \ge |x| - |y|.$$

6. *Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей этих чисел:* $|xy| = |x|\,|y|$.

Примечание 2. Свойство 6 справедливо для любого конечного числа сомножителей.

7. *Модуль частного двух действительных чисел (если делитель отличен от нуля) равен частному модулей этих чисел:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Свойства 6, 7 непосредственно следуют из определения абсолютной величины числа.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$ ($a < x < b$), называется сегментом или отрезком (интервалом) и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$).

Полусегментом $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ ($a < x \le b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x < a (x \le a)$ или $x > b$ ($x \ge b$), обозначаются соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел обозначается символом $(-\infty, +\infty)$, или $|x| < +\infty$. Все указанные множества называют *промежутками*. *Окрестностью* точки x_0 называют любой интервал, содержащий эту точку. ε-*окрестностью* ($\varepsilon > 0$) точки x_0 называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т. е. множество чисел, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \varepsilon$.

2. Погрешности вычисления. Пусть некоторая величина имеет точное значение a. В результате измерения этой величины получено ее приближенное значение x. *Абсолютной погрешностью* Δ_0 приближенного значения x называется модуль разности между числом x и точным значением a: $\Delta_0 = |x - a|$.

Если число a неизвестно (что бывает в большинстве измерений), то абсолютную погрешность вычислить нельзя. В этом случае используется *предельная абсолютная погрешность* — положительное число Δ, такое, что $\Delta_0 \le \Delta$. Очевидно, что $x - \Delta \le a \le x + \Delta$. Кратко последнее неравенство записывают так: $a = x \pm \Delta$.

Пример 1. Если x_1 и x_2 — приближенные значения точного значения числа a, причем известно, что $x_1 \le a \le x_2$, то $a = x \pm \Delta$, где

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad \Delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Точность измерения характеризуется с помощью *относительной погрешности*. *Относительной погрешностью* δ_0 приближенного значения x называется отношение абсолютной погрешности этого значения к модулю точного значения a: $\delta_0 = \Delta_0/|a|$.

Если точное значение a неизвестно, то используют предельную относительную погрешность — положительное число δ, такое, что $\delta_0 \le \delta$.

Для вычисления относительных погрешностей часто используются приближенные формулы:

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \quad \text{и} \quad \delta \approx \frac{\Delta}{|x|}.$$

Эти формулы тем точнее, чем ближе значение x к точному значению a, т. е. чем меньше погрешность Δ_0 или Δ.

Пример 2. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности числа 1,41 — приближенного значения числа $\sqrt{2}$? Так как $1{,}410 < \sqrt{2} < 1{,}415$, то $\Delta_0 = \sqrt{2} - 1{,}410 < 0{,}005$. Следовательно, можно положить $\Delta = 0{,}005$. Далее,

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}} < \frac{0{,}005}{1{,}41} < 0{,}0036,$$

откуда $\delta = 0{,}0036$ или $\delta = 0{,}36\%$.

Говорят, что приближенное значение x (записанное в виде десятичной дроби) имеет *n верных знаков*, если абсолютная погрешность этого числа меньше или равна половине единицы его n-го разряда. Например, если 9,263 имеет 3 верных знака 9, 2 и 6, то абсолютная погрешность этого числа $\Delta_0 \leq 0{,}005$.

3. Понятие функции. При изучении природных и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же числовое значение — они называются *постоянными*, а другие принимают различные числовые значения и называются *переменными*. Примерами постоянных величин могут служить: температура кипения воды при нормальном давлении, скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Скорость камня, брошенного вверх, есть переменная величина: сначала она уменьшается, и когда камень достигает наивысшей точки полета, скорость его становится равной нулю. Затем начинается свободное падение под действием силы тяжести, и скорость камня увеличивается.

В практических задачах изменение переменной величины обычно связано с изменением одной или нескольких других переменных величин. Например, путь, пройденный телом с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения: $s = vt$. Этой формулой выражена зависимость переменной s — пути, пройденного телом, от переменной t — времени движения. Видно, что переменные s и t не могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Придав определенное значение переменной t, мы тем самым единственным образом определим значение переменной s.

Определение. Если каждому значению, которое может принять переменная x, по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть однозначная *функция* от x; обозначают $y = f(x)$ (читается: «Игрек равно эф от икс»).

Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = y(x)$ и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*.

Совокупность всех значений аргумента x, для которых функция $y = f(x)$ определена, называется *областью определения* этой функции. Совокупность всех значений, принимаемых переменной y, называют *областью значений* функции $y = f(x)$.

Пример. Найти область определения функции $y=\sqrt{4-x^2}$. Эта функция имеет смысл, если $4 - x^2 \geq 0$. Отсюда $x^2 \leq 4$, или $|x| \leq 2$. Следовательно, область определения данной функции есть сегмент $[-2; 2]$. Множество значений этой функции есть сегмент $[0; 2]$.

4. Способы задания функции. *Аналитический способ* — это способ задания функции при помощи формул. Например, $y = 2x$, $y = x + 1$, $y = \lg x$, $y = \sin x$, $y = x^2$. Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется неявной. Когда такое решение возможно, неявная функция может быть приведена к явной форме, т. е. к виду $y = f(x)$. Например, уравнение $2x + 3y - 5 = 0$ можно рассматривать как неявно задающее функцию. Решив его относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже в явном виде: $y = (5 - 2x)/3$.

Отметим, что при аналитическом способе задания функции встречаются случаи, когда функция задана не одной, а несколькими формулами, например:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \leq 0, \\ -x^2, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ — это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т. п. Табличный способ задания функции широко используется в различного рода экспериментах и наблюдениях. Таблицы просты в обращении, для нахождения значения функции не надо производить вычисления. Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

Графический способ — это способ задания функции при помощи графика. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется *уравнением* этого *графика*.

С построением графиков мы уже встречались в гл. 1. Например, графиком функции $y = x$ является прямая (см. рис. 7).

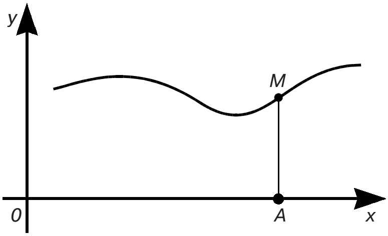


Рис. 63

Заметим, что если имеется график некоторой функции $y = f(x)$, то для нахождения значения $y = f(x)$, отвечающего какому-нибудь заданному значению x, надо отложить это значение x по оси абсцисс и из полученной точки восставить перпендикуляр до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра, взятая с соответствующим знаком, и равна $f(x)$. Например, на рис. 63 имеем $OA = x, AM = f(x)$.

Преимуществом графического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным является его наглядность.

Графический способ задания функции обычно используется в практике физических измерений, когда соответствие между переменными x и y задается посредством графика. Во многих случаях графики чертятся с помощью самопишущих приборов. Так, например, для измерения атмосферного давления на различных высотах пользуются специальным самопишущим прибором — барографом, который на движущейся ленте записывает в виде кривой линии изменения давления в зависимости от высоты.

7.2. ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

1. Целая рациональная функция. Многочлен вида

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

(a_0, a_1, a_2, ..., a_m — постоянные числа, называемые *коэффициентами* многочлена; m — натуральное число, называемое *степенью* многочлена) — целая рациональная функция. Эта функция определена при всех значениях x.

Пример. $y = kx + b$ — *линейная функция*. Ее график — прямая линия (см. 1.4, п. 1). При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость y от x. В этом случае ее график проходит через начало координат.

2. Дробно-рациональная функция. Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}.$$

Она определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Дробно-рациональной функцией является, например, функция $y = k/x$, выражающая обратно пропорциональную зависимость между x и y. Ее график есть равносторонняя гипербола (см. 5.1, п. 2).

3. Степенная функция. *Степенная функция* — это функция вида

$$y = x^a, \tag{1}$$

где a — действительное число. Она определена при всех значениях x, если a — натуральное число; при всех x, не равных нулю, если a — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если a — произвольное действительное число.

Пример 1. $y = ax^2$. График этой функции — парабола (см. 5.1, п. 3).

Если $a = 1/q$, где q — натуральное число, то функция (1) примет вид:

$$y = \sqrt[q]{x} \tag{2}$$

(Символ $\sqrt[q]{}$ называют *корнем степени* q, или *радикалом*.)

Функция (2) определена при всех неотрицательных x, если q четное, и при всех x, если q нечетное.

Пример 2. $y = \sqrt{x}$. График этой функции — верхняя ветвь параболы $y^2 = x$ (см. 5.1, п. 3).

4. Показательная функция. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *показательной*. Она определена при всех x (рис. 64).

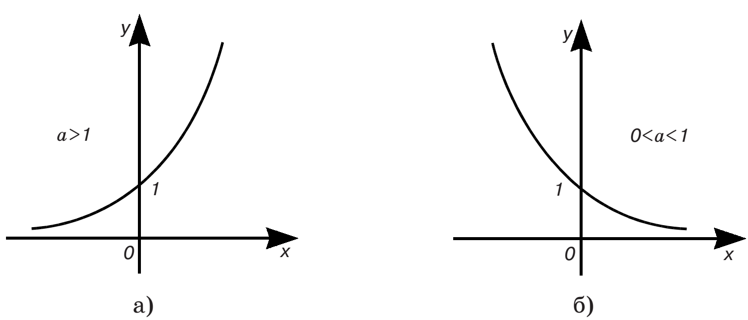


Рис. 64

5. Логарифмическая функция. Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, *называется логарифмической.* Она определена при $x > 0$ (рис. 65).

6. Понятие обратной функции. Между степенной функцией и радикалом, а также между показательной и логарифмической функциями существует связь, выражаемая через понятие обратной функции.

Пусть

$$y = f(x) \tag{3}$$

есть функция независимой переменной x. Это значит, что, задавая значения x, мы вполне определяем значения зависимой переменной y. Поступим наоборот, а именно: будем считать независимой переменную y, а зависимой переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, *обратной* к данной.

Предполагая, что уравнение (3) разрешимо относительно x, получим явное выражение обратной функции:

$$x = \varphi(y). \tag{4}$$

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, т. е данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Иногда удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее значения.

Пример. Двузначная функция $x = \pm\sqrt{y}$ является обратной по отношению к функции $y = x^2$. Если условиться для корня брать лишь его арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Очевидно, что если функция, заданная формулой (4), есть функция, обратная к (3), то и функция (3) будет обратной по от-

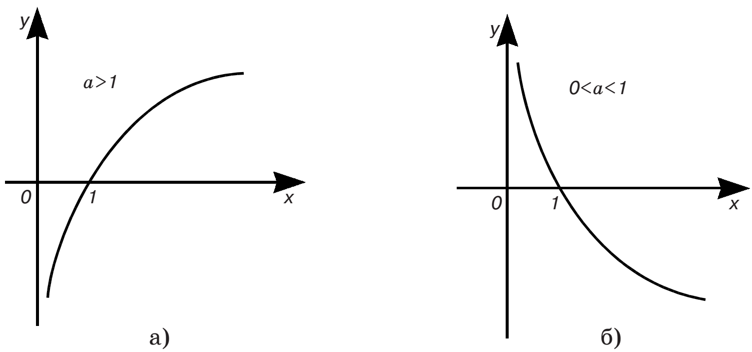


Рис. 65

ношению к функции (4), т. е. эти функции являются взаимно обратными.

Иногда придерживаются стандартных обозначений: под x понимают независимую переменную, а под y — функцию, т. е. зависимую переменную. В таком случае обратную функцию следует писать в виде $y = \varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ являются взаимно обратными.

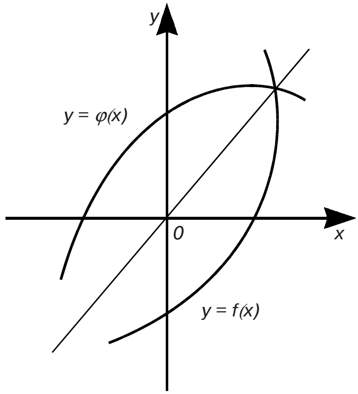


Рис. 66

Чтобы из графика данной функции $y = f(x)$ получить график обратной ей функции $y = \varphi(x)$, очевидно, достаточно график первой функции симметрично отобразить относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 66).

7. Тригонометрические функции. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для всех значений x. Они являются периодическими с периодом 2π, т. е. при изменении аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается прежним. Кроме того, функция $\sin x$ нечетная ($\sin(-x) = -\sin x$), $\cos x$ четная $\cos(-x) = \cos x$). Графики этих функций — синусоида и косинусоида (рис. 67).

Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x = 0$, т. е. в точках $x = ((2k + 1)/2)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x = 0$, т. е. в точках $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). При этом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, имеющие период π, изображены на рис. 68.

Отметим, что в тригонометрических функциях переменная x обычно выражается в радианах.

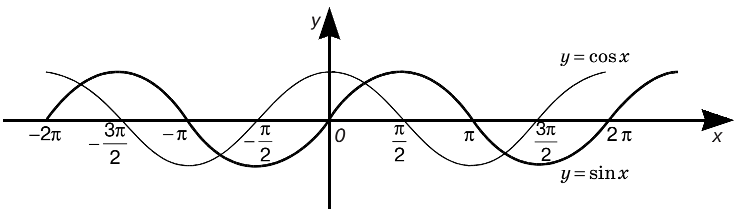


Рис. 67

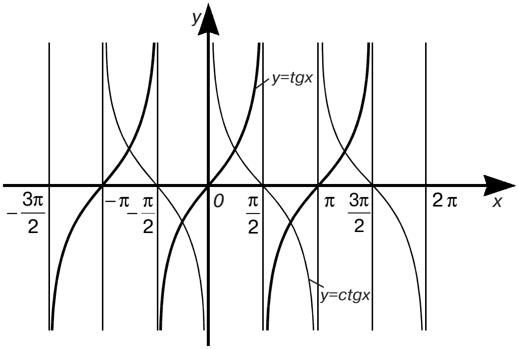


Рис. 68

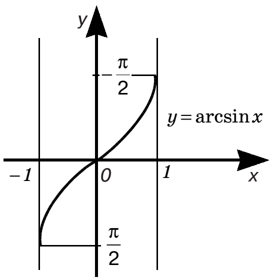


Рис. 69

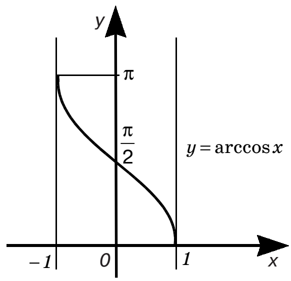


Рис. 70

8. Обратные тригонометрические функции. Функция $y = \arcsin x$. Здесь y — переменная из сегмента $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, синус которой равен x, т. е. $x = \sin y$. Область определения этой функции — сегмент $-1 \le x \le 1$, а ее график изображен на рис. 69.

Функция $y = \arccos x$, означает, что $x = \cos y$, причем $|x| \le 1$ и $0 \le y \le \pi$. График $y = \arccos x$ изображен на рис. 70.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть переменная, тангенс которой равен x, т. е. $x = \operatorname{tg} y$, причем x любое и $|y| < \pi/2$ (рис. 71), а функция $y = \operatorname{arcctg} x$ есть переменная, для которой $x = \operatorname{ctg} y$, где x — любое и $0 < y < \pi$ (рис. 72).

9. Сложная функция. элементарные функции. Пусть переменная y зависит от переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, т. е. $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться и y. Значит, y является функцией x: $y = f(\varphi(x))$. Эта функция называется *сложной функцией* (или *функцией от функции*), переменная u

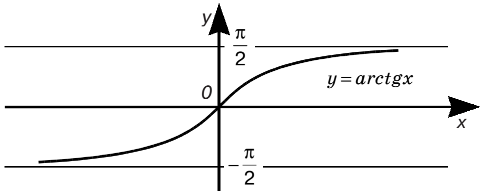


Рис. 71

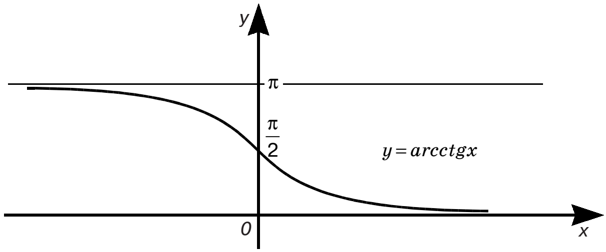


Рис. 72

называется *промежуточной* переменной. Указанную сложную функцию называют также *суперпозицией функций* f и φ.

Пример. Если $y = \sin u$, а $u = x^2$, то $y = \sin x^2$ есть сложная функция независимой переменной x.

Функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, постоянная функция $y = f(x) = C$, $C = const$, — называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), называется *элементарной функцией*.

Например, элементарными функциями будут рассмотренные выше целая рациональная и дробно-рациональная функции.

Важное значение элементарных функций состоит в том, что в математическом анализе, применяемом в основных задачах физики и техники, употребляются чаще всего элементарные функции.

10. Гармонические колебания. В природе и технике часто происходят явления и процессы, повторяющиеся периодически, например, колебания маятника, переменный ток, электромагнитные колебания и др.

Рассмотрим простейший вид колебаний, так называемое *гармоническое колебание*:

$$y = A\sin\omega t \qquad (5)$$

(A и ω — положительные постоянные).

График функции, заданной формулой (5), изображен на рис. 73.

Коэффициент A, представляющий наибольшую величину, которую может иметь y, называется *амплитудой* колебания, а ω — *частотой* колебания. Функция (5) является периодической с периодом $2\pi/\omega$: значения y в точках $t + k(2\pi/\omega)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) одни и те же. Если считать, что t — время, то период $T = 2\pi/\omega$ показывает время, в течение которого совершается одно колебание. Поэтому $\omega = 2\pi/T$ — число колебаний за время 2π. График гармонического колебания (рис. 73) называется *простой гармоникой*.

Однако далеко не всегда периодическое явление описывается простой гармонией. Многие из таких явлений есть результат сложения нескольких простых гармоник, который называется *сложным гармоническим колебанием*, а его график — *сложной гармоникой*.

На рис. 74 изображена сложная гармоника $y = \sin t + \sin 2t$ — результат сложения двух простых гармоник $y = \sin t$ и $y = \sin 2t$.

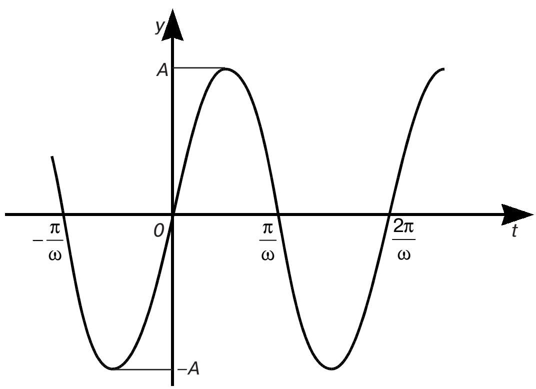


Рис. 73

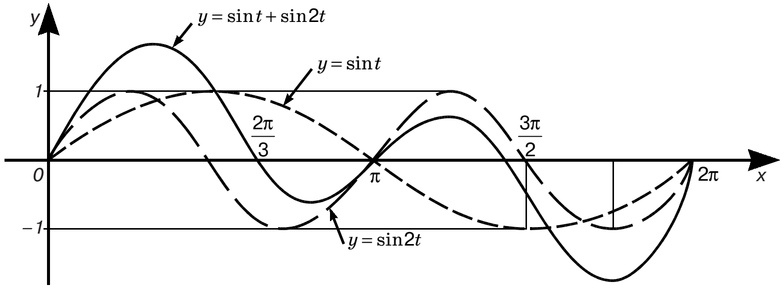


Рис. 74

7.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Предел числовой последовательности. *Бесконечной числовой последовательностью* (или просто числовой последовательностью) называется функция $a_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральный чисел 1, 2, ..., n, ... Значения последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ее *членами*.

Последовательность $a_n = f(n)$ иногда обозначают так: $\{a_n\}$. Это означает, что задана последовательность с *общим* членом a_n. По данному общему члену всегда можно найти любой член последовательности a_k, подставив в a_n вместо n число k. Ниже приведены примеры последовательностей, причем сначала приведена форма записи $\{a_n\}$, а затем записаны первые члены:

1) $\left\{(-1)^n n\right\};\quad -1, 2, -3, \ldots;$

2) $\left\{3n+1\right\};\quad 4, 7, 10, \ldots;$

3) $\left\{2-n\right\};\quad 1, 0, -1, \ldots;$

4) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\};\quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots;$

5) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\};\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots;$

6) $\left\{\dfrac{n+1}{2n}\right\};\quad 1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \ldots;$

7) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\};\quad -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots;$

Для числовой последовательности, как и для любой функции, можно построить график. Он не является линией, а состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси Oy. На рис. 75, 76 и 77 построены графики последовательностей 1, 2, и 5.

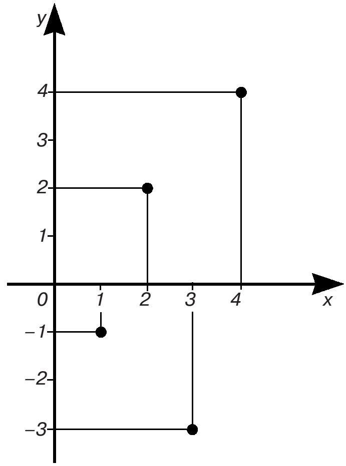


Рис. 75

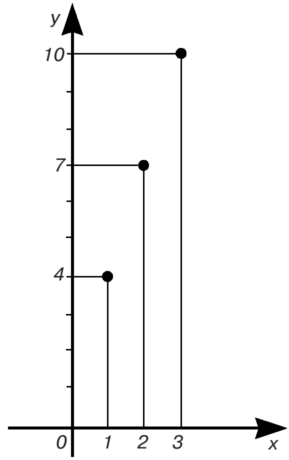


Рис. 76

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если для любого номера n справедливо неравенство $a_n \geq a_{n+1}$($a_n \leq a_{n+1}$). Если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$), то последовательность $\{a_n\}$ — убывающая (возрастающая). Например, последовательность 3 убывающая, последовательность 2 возрастающая. Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* сверху (снизу), если существует такое число M, что для любого номера n выполняется неравенство $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$). Последовательность 3 ограничена сверху, например, числом 1. Последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются *ограниченными*. Последовательность 4 ограничена.

По графику последовательности 5 (рис. 77) видно, что ординаты точек с увеличением номера n приближаются к единице.

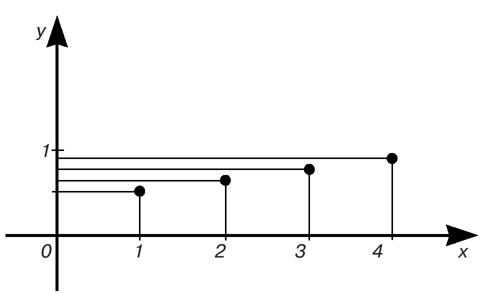


Рис. 77

Члены последовательности 4 с возрастанием номера становятся близкими к нулю.

Определение. Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от е, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Примеры. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Ограничимся доказательством первого из этих четырех равенств, так как доказательства трех других проводятся аналогично.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Из последнего неравенства следует, что в качестве номера N можно взять целую часть числа $1/\varepsilon$, т. е. $N = [1/\varepsilon]$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$.

Характер стремления последовательности к своему пределу различен. Последовательности 4 и 6 стремятся к своим пределам убывая; последовательность 5 стремится к единице возрастая; последовательность 7 стремится к нулю так, что ее члены становятся поочередно то больше, то меньше нуля.

Отметим следующие важные свойства пределов последовательностей:

1. *Последовательность, имеющая предел, ограничена.*

Действительно, из определения предела следует: если последовательность $\{a_n\}$ имеет своим пределом число a, то, например, для $\varepsilon = 1$ найдется натуральное число N, такое, что при $n > N$ $|a_n - a| < 1$, или, что то же, $a - 1 < a_n < a + 1$. Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N, a - 1, a + 1$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ $m \le a_n \le M$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

2. *Последовательность может иметь только один предел.*

Это следует из более общего свойства (см. 7.5, п. 1, следствие 1).

3. *Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.*

Строгое доказательство этого предложения см. в [8]. Здесь приведем разъяснение его справедливости. В целях простоты и наглядности такого разъяснения ограничимся рассмотрением возрастающей последовательности $y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots$(ее члены рассматриваем как точки оси Oy), ограниченной сверху: $y_n < M$ ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда так как точка y_n, двигаясь в одном направлении — вверх по оси Oy, не переходит точку $y = M$, то точка y_n должна неограниченно приближаться к некоторой точке $y = a$, при этом ясно, что $a \le M$.

2. Число е. Рассмотрим числовую последовательность.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}. \tag{1}$$

Для доказательства существования предела этой последовательности воспользуемся свойством 3 предыдущего пункта. Для этого покажем сначала, что последовательность (1) возрастающая. Разложим общий член последовательности $a_n = (1 + 1/n)^n$ по формуле бинома Ньютона (об этой формуле см., например, в главе 8: 8.9, п. 2; Исаак Ньютон (1643–1727) — английский математик и физик):

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

или

$$a_n = 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2}$$

Из равенства (2) видно, что с увеличением номера n каждое слагаемое, кроме первого, увеличивается. Возрастает также число таких слагаемых. Следовательно $a_n < a_{n+1}$ для всех n, и поэтому последовательность возрастающая.

Покажем теперь, что последовательность (1) ограничена сверху. Заменим во всех членах разложения (2) выражения в круглых скобках единицами. Тогда

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Подставляя вместо множителей 3, 4, ..., n в знаменателях число 2, мы еще больше увеличим правую часть:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Поэтому $a_n < 3$ при любом n.

По свойству 3 предыдущего пункта последовательность (1), как возрастающая, ограниченная сверху, имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e (*второй замечательный предел*):

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (3)$$

Число e является иррациональным и приблизительно равно 2,71828.

3. Натуральные логарифмы. Число e принято за основание системы логарифмов, называемых *натуральными* логарифмами. Оказалось, что с помощью натуральных логарифмов некоторые формулы записываются проще. Для обозначения натурального логарифма числа N пользуются символом $\ln N$.

Для отыскания приближенных значений натуральных логарифмов по таблицам десятичных логарифмов найдем связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Если $\ln N = a$, то $N = e^a$, и логарифмирование обеих частей последнего равенства по основанию 10 дает $\lg N = a \lg e$ ($\lg e \approx$ $\approx 0{,}43429$), или $\lg N = \ln N \cdot \lg e$, откуда

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \left(\frac{1}{\lg e} \approx 2{,}30258\right).$$

4. Предел функции. Выше рассмотрено понятие предела для частного вида функций — числовых последовательностей. Обобщим его на произвольные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, может быть, самой точки a.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Другими словами, число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно, в тех точках x, в которых функция $f(x)$ определена).

Пример 1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Выбрав $\delta = \varepsilon$, получим, что $|x - 1| < \varepsilon$ как только $0 < |x - 1| < \delta$. Следовательно, согласно определению предела функции, $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Если $|x - 1| < \delta$, то $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \le |x - 1| + 2 < \delta + 2$. Следовательно, $|x^2 - 1| = |x - 1|\,|x + 1| < \delta(\delta + 2)$. Для выполнения неравенства $|x^2 - 1| < \varepsilon$, достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$, т. е. чтобы $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Отсюда $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$ (второй корень $-1 - \sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасываем, так как $\delta > 0$). По определению предела функции $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.

Примечание. Если в формуле (3) положить $1/n = z$, то она примет вид:

$$e = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}. \tag{4}$$

Оказывается, что формула (4) верна не только, когда переменная z пробегает последовательность значений $z_n = 1/n$, но и при любом другом законе стремления z к нулю.

При изучении свойств функций приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента x к бесконечности.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к бесконечности (или в бесконечности), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительно число $N = N(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Рассматривают также, как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, так и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) определяется аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только в самой формулировке определения $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ условие $|x| > N$ следует заменить на $x > N$ ($x < -N$).

7.4. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Бесконечно малые и их свойства. При изучении свойств пределов особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой,* если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательности $\{1/n\}$, $\{(-1)^n 1/n\}$ являются бесконечно малыми: их пределами является нуль (см. 7.3, п. 1). Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на функции.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ называют также бесконечно малой величиной или просто бесконечно малой.

Пример. Показать, что функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$. Как показано ранее (см. 7.3, п. 4, пример 2), таким δ является $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$. Следовательно, функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

В дальнейшем в этом параграфе при рассмотрении бесконечно малых будем иметь в виду, что они являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Остановимся на основных свойствах бесконечно малых функций. Эти свойства будут верны также и для бесконечно малых последовательностей.

1. *Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то функция $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ также есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ бесконечно малые, то найдутся такие числа δ_1 и δ_2, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ и $0 < |x - a| < \delta_2$ имеют место соответственно неравенства:

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ будут верны неравенства (1), и, следовательно, $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < \varepsilon$, а это и означает, что $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ есть функция бесконечно малая.

Примечание 1. Свойство 1 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* при $x \to a$, если существуют положительные числа M и δ, такие, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Например, любая бесконечно малая $\alpha(x)$ является ограниченной функцией при $x \to a$.

Температура воздуха T в данной местности — ограниченная функция времени t. Изменяясь днем и ночью, зимой и летом, она никогда не достигнет $+100^\circ$C и -100°C. Таким образом, $|T(t)| < 100$.

2. *Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — ограниченная при $x \to a$ функция и $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для всех x, достаточно близких к a. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для ε существует такое $\delta > 0$, что при условии $0 < |x - a| < \varepsilon$ одновременно выполняются неравенства $|f(x)| \le M$, $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$. Поэтому $|f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| \le M \cdot (\varepsilon/M) = \varepsilon$.

Непосредственно из свойства 2 следует свойство 3 и 4.

3. *Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

4. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на любое конечное число бесконечно малых.

2. Бесконечно большие. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательности $\{n\}$, $\{(-1)^n n\}$, являются бесконечно большими.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на функции.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Если при этом $f(x)$ положительна (отрицательна) в $0 < |x - a| < \delta$, то пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$.

Примечания 1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая функция есть бесконечно большая.

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ при $x \to a$ не имеет предела, так как предел переменной (если он существует) — некоторое число. То же в случае бесконечно большой числовой последовательности.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности (функции) будем понимать конечный предел, т. е. число, если не оговорено противное.

Ниже рассматриваются бесконечно большие функции при $x \to a$.

Как видно из следующих свойств, которые верны и для последовательностей, бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой.

1. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $1/f(x)$ бесконечно малая.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и обозначим $1/\varepsilon = M$. Так как $f(x)$ бесконечно большая, то числу M соответствует $\delta > 0$, такое что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M = 1/\varepsilon$, откуда $1/|f(x)| < \varepsilon$.

2. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $1/\alpha(x)$ бесконечно большая.*

Доказательство. Возьмем любое $M > 0$ и обозначим $1/M = \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая, то числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \varepsilon$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon = 1/M$, откуда $1/|\alpha(x)| > M$.

Пример. Функция $1/(x^2 - 1)$ бесконечно большая при $x \to 1$, так как функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$, (п. 1, пример).

Замечание. В данном параграфе были рассмотрены функции аргумента x для случая, когда $x \to a$. Однако все предложения, установленные здесь, остаются в силе и для случая, когда $x \to \infty$. При этом все доказательства аналогичны.

7.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

1. Основные теоремы о пределах. Прежде сделаем следующее замечание. Ниже рассматриваются функции аргумента x, при этом $x \to a$ или $x \to \infty$. Все устанавливаемые в этом пункте предложения о пределах имеют место в обоих случаях, они верны также и для последовательностей. Здесь приводится доказательство для одного из этих случаев ($x \to a$), так как для другого доказательство аналогично. Это замечание относится и к п. 4 этого параграфа.

Теорема 1. *Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(x) = A + \alpha(x)$,* где $\alpha(x)$ — *бесконечно малая.*

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. функция $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая и $f(x) = A + \alpha(x)$.

2) Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для x из $0 < |x - a| < \delta$ будет $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. A — предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Следствие 1. *Функция не может в одной точке иметь два различных предела.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $(A \neq B)$, то по теореме 1 $f(x) = A + \alpha(x)$ и $f(x) = B + \beta(x)$ ($\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые). Отсюда $A + \alpha(x) = B + \beta(x)$ и $A - B = \beta(x) - \alpha(x)$, где $\beta(x) - \alpha(x)$ — бесконечно малая, а $A - B$ — постоянная. Этой постоянной может быть только нуль. Поэтому $A = B$.

Теорема 2. *Предел постоянной величины равен самой постоянной.*

Это предложение непосредственно вытекает из определения предела.

Теорема 3. *Если функция $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для всех* x *в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq 0)$.

Доказательство. Пусть, например, $f(x) \geq 0$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Если бы было $A < 0$, то для $\varepsilon = |A|/2$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$ было бы невозможно ни при каком $\delta > 0$, так как влекло бы за собой отрицательность $f(x)$.

Примечание 1. Заметим, что при условии, что $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, из $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), вообще говоря, не вытекает $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) < 0)$, а вытекает только $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0)$. Так, $|x| > 0$ для всех $x \neq 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.

Теорема 4. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$, имеет пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем*

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x), \tag{2}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} f_1(x) \, / \, \lim_{x \to a} f_2(x). \tag{3}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая суммы. Все остальные утверждения доказываются аналогично.

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$. Тогда, согласно теореме 1,

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_1(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые. Отсюда

$$f_1(x) + f_2(x) = (A_1 + A_2) + (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)).$$

По свойству 1 бесконечно малых (7.4, п. 1) сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ бесконечно мала. Следовательно, по теореме 1

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2.$$

Примечание 1. Формула (1) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (2) — на случай любого конечного числа сомножителей.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то*

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n,$$

где n — натуральное число.

Следствие 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x), \quad C \text{ — const}.$$

Теорема 5. *Если для функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство*

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) \tag{4}$$

и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A,$ *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A.$

Доказательство. Из определения предела вытекает, что существует окрестность точки a (при $x \ne a$), в которой одновременно выполняются следующие неравенства:

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon,\ |f_2(x) - A| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем эти неравенства, освободившись от знака абсолютной величины:

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A_1 + \varepsilon, \tag{5}$$

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A_1 + \varepsilon. \tag{6}$$

Из неравенств (4) и (5) имеем $A - \varepsilon < f_1(x) \le f(x)$, откуда

$$A - \varepsilon < f(x). \tag{7}$$

Аналогично из неравенств (4) и (6) получим

$$f(x) < A + \varepsilon. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, или

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

2. Примеры нахождения пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1).$

Используя теоремы 4 и 2 и следствия 3 и 2, последовательно получаем:

$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 1 = 2(\lim\limits_{x\to 1} x)^2 + 1.$ Но, как уже установлено (7.3, п. 4, пример 1), $\lim\limits_{x\to 1} x = 1.$ Поэтому $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1) = 3.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^3+1}.$ Как и в примере 1, находим, что

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1) = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 1 = (\lim\limits_{x\to 1} x)^3 + 1 = 1 + 1 = 2.$ Теперь по теореме 4

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^3+1)}.$$

Но $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+1)=\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}5x+\lim\limits_{x\to1}1=(\lim\limits_{x\to1}x)^2-5\lim\limits_{x\to1}x+1=-3.$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}=-\frac{3}{2}.$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью формул (1), (2), (3). Так, формулы (1) и (2) утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не имеет предела. Формула (3) неверна, если знаменатель дроби стремится к нулю. Здесь могут представиться два случая.

а) Предел числителя не равен нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{1-x^2}.$

Имеем $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)=0.$ Поэтому формулу (3) в этом примере использовать нельзя. Так как

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to1}x^2}=\frac{0}{1}=0,$$

то функция $(1-x^2)/x^2$ бесконечно малая при $x\to1$. Тогда функция $x^2/(1-x^2)$ бесконечно большая при $x\to1$, т. е. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{1-x^2}=\infty.$

Можно отметить, что, когда x приближается к 1 слева, т. е. оставаясь все время меньше 1 (что записывают: $x\to1-0$), функция $x^2/(1-x^2)$ остается все время положительной. В этом случае записывают:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{1-x^2}=+\infty.$$

Если же x приближается к 1 справа, т. е. оставаясь все время больше 1 (что записывают: $x\to1+0$), то эта функция остается все время отрицательной. В этом случае записывают:

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{1-x^2}=-\infty.$$

б) Предел числителя равен нулю.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}.$

Здесь $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x)=0+3\cdot 0=0,\quad \lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)=0+0=0.$

Говорят, что в этом случае имеем *неопределенность вида* 0/0. Однако предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$ существует и его можно найти. Для его нахождения, т. е. раскрытия *неопределенности вида* 0/0, нужно предварительно преобразовать дробь $(x^2+3x)/(x^2+x)$, разделив числитель и знаменатель почленно на x, что возможно, так как до перехода к предельному значению $x\neq 0$. Следовательно, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1}=3.$ В результате имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}=3.$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}.$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})=0,\quad \lim\limits_{x\to 0}=0,$ то здесь также имеем неопределенность вида 0/0. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-2\cdot\frac{1}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь примеры на вычисление пределов функций при $x\to\infty$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{3x+2}.$

Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)=\infty.$ Поэтому (7.4) функция $1/(3x+2)$, значит, и функция $4/(3x+2)$ бесконечно малые при $x\to\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{3x+2}=0.$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{4x+1}.$

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}(4x+1)=\infty.$ Говорят, что в этом случае имеем *неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3x+5}{4x+1}$ почленно разделим на x. Следовательно, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Но $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$. В результате имеем, что

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3}{4}$.

Аналогично устанавливается, что при $x \to \infty$, дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

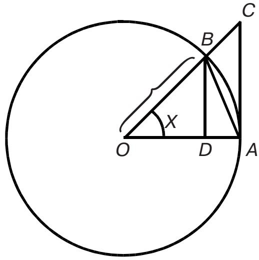


Рис. 78

3. Первый замечательный предел. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{9}$$

называемое *первым замечательным пределом*. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Перейдем к доказательству равенства (9). Возьмем круг единичного радиуса и предположим, что угол x, выраженный в радианах, заключен в интервале $(0; \pi/2)$ (рис. 78). Обозначим площади треугольников OAB и OAC соответственно через S_1 и S_2, а площадь сектора OAB через S. Из рис. 78 видно, что

$$S_1 < S < S_2. \tag{10}$$

Замечая, что $AC = OA \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$, имеем $S_1 = (1/2) \cdot OA \cdot OB \cdot \sin x = (1/2)\sin x$, $S = (1/2) \cdot OA^2 \cdot x = (1/2)x$, $S_2 = (1/2) \cdot OA \cdot AC = (1/2) \operatorname{tg} x$. Поэтому с учетом неравенств (10) получаем:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда после деления на $\sin x$ и сокращения на $1/2$ находим:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{11}$$

Неравенства (11) получены для $0 < x < \pi/2$. Однако $\cos x$ и $(\sin x)/x$ — четные функции: $\cos(-x) = \cos x$, $(\sin(-x))/(-x) = (-\sin x)/(-x) (\sin x)/x$. Тем самым неравенства (11) справедливы в интервале $-\pi/2 < x < 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (это следует из геометрического определения косинуса), то из неравенств (11) на основании теоремы 5 заключаем, что действительно имеет место равенство (9).

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2\sin 2x}{2x}}{\dfrac{5\sin 5x}{5x}}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{2}{5}.$

4. Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ (для компактности записи будем обозначать их просто α и β). Выделим три случая.

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0.$ В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *высокого* порядка, чем β.

Пример 1. При $x \to 2$ функция $(x-2)^3$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-2$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^3}{x-2}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0.$ В этом случае функции α и β называются бесконечно малыми *одного* порядка.

Пример 2. При $x \to 0$ функции $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{x^2}=5.$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty.$ В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *низкого* порядка, чем β. Можно сказать также, что β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α.

Пример 3. При $x \to -1$ функция $x+1$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $(x-1)(x+1)^2$, так как

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2}=\infty.$$

Определение. Если функции α и β бесконечно малые одного порядка, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,$ то они называются *эквивалент-*

ными бесконечно малыми. Символически это записывается так: $\alpha \sim \beta$.

Из определения, в частности, следует, что если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, т. е. если α и β — бесконечно малые одного порядка, то α и $A\beta$ будут являться эквивалентными бесконечно малыми: $\alpha \sim A\beta$.

Пример 4. Как установлено в п. 3, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, т. е. $\sin x$ и x при $x\to 0$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Теорема. *Если существует предел отношения двух бесконечно малых* α и β, *то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых*.

Доказательство. Действительно, если $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}$, то, перейдя к пределу в равенстве $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\dfrac{\beta_1}{\beta}$, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1}{\beta}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot 1=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$, так как $\sin 5x\sim 5x$, при $x\to 0$ (см. пример 4).

7.6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Понятие непрерывности. Мы видели, что графиками последовательностей являются множества точек. Эти точки всегда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Графиком же, например, степенной функции является кривая, которая похожа на сплошную непрерывную линию. Оказывается, эту разницу характеризует точное математическое понятие непрерывности, к введению которого и перейдем.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x — два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, откуда $x = x_0 + \Delta x$. Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано приращение Δx.

Приращение Δy, *функции* $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Например, приращением функции $y = x^3$, которое соответствует приращению Δx аргумента x в точке x_0, будет величина

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Пример 1. Функция $y = x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле, $\Delta y = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$, и, значит $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$

Пример 2. Функция $y = \sin x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле, $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$ Отсюда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$ так как

$$\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1, \quad \text{а} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\Delta x}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции $\cos x$.

Функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на этом интервале.

Теорема 1. *Если функции* $f_2(x)$ и $f_2(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *то непрерывны в этой точке также их алгебраическая сумма* $f_1(x) \pm f_2(x)$, *произведение* $f_1(x)f_2(x)$ *и при условии* $f_2(x_0) \ne 0$ *частное* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Эта теорема вытекает из аналогичной теоремы о пределах.

Примечание. Для алгебраической суммы и произведения теорема 1 распространяется на любое конечное число функций.

Теорема 2. *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Согласно непрерывности функции $u = \varphi(x)$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ также и $u \to u_0$. Поэтому в силу непрерывности функции $f(u)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0))$, что и доказывает теорему 2.

Таким образом, сложная функция $y = f(\varphi(x))$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, является непрерывной функцией.

Имеет место и следующая теорема.

Теорема 3. *Если $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция также непрерывна.* Вместо доказательства ограничимся следующим наглядным соображением: если график функции $y = f(x)$ — непрерывная кривая, то график обратной к ней функции тоже непрерывная кривая.

Теорема 4. *Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.*

Доказательство. Постоянная функция $y = C$ непрерывна при любом значении $x = x_0$, так как $\Delta y = C - C = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как функция $y = x$ непрерывна при любом x (см. пример 1), то, согласно теореме 1, степенная функция $y = x^n$, где n — натуральное число, также непрерывна при любом x.

Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду (см. пример 2); $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где они определены как отношения двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность функции $y = x^\alpha$ (α — действительное число) и других основных элементарных функций там, где они определены.

Из теорем 1, 2 и 4 вытекает:

Следствие. *Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Имеет место (см. например, [8]) следующее предложение.

Теорема 5. *Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0, не равная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0.*

2. Точки разрыва функции. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *разрывна*, а точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В качестве конкретного примера функции, имеющей точку разрыва, рассмотрим скорость тела, падающего на землю. Эта скорость вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. скорость терпит разрыв.

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева (справа)* называется предел, вычисляемый в предположении, что x стремится к x_0, оставаясь все время меньше (больше) значения x_0. Пределы слева и справа, называемые *односторонними* пределами, соответственно обозначают:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Точка x_0 разрыва функции $f(x)$ называется точкой разрыва *первого рода*, если существуют односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(при этом функция $f(x)$ необязательно должна быть определена в точке x_0).

Все прочие точки разрыва функции $f(x)$ называются ее точками разрыва *второго рода*.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на сегменте $[0; 4]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если} \quad 0 \le x < 3, \\ 3-x, & \text{если} \quad 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

Эта функция (рис. 79) определена во всех точках сегмента $[0; 4]$ и ее значение при $x = 3$ равно 0. Однако в точке $x = 3$ функция претерпевает разрыв первого рода, так как при $x \to 3$

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 3+0} f(x) = 0.$$

Точка x_0 разрыва первого рода, в которой

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

называется точкой *устранимого* разрыва.

Пример 2. Функция $(\sin x)/x$ в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв, так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пусть x_0 — точка разрыва первого рода.

Скачком функции $f(x)$ в точке x_0 называют разность

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)-\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Так, функция, рассмотренная в примере 1, имеет в точке $x = 3$ скачок, равный $0 - 2 = -2$.

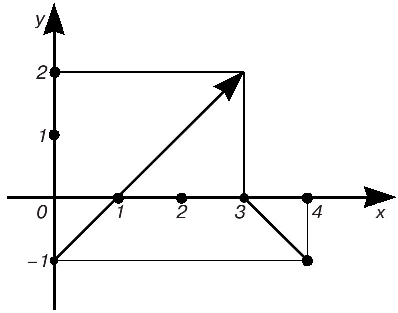


Рис. 79

Пример 3. Функция $y = 1/x$ (см. рис. 47) в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода, так как эта функция при $x \to 0$ не имеет предела ни слева, ни справа.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 *слева (справа)*, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\right)$.

3. Свойства функций, непрерывный на сегменте. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a; b]$, если она непрерывна в интервале $(a; b)$ и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

Ниже при рассмотрении свойств функций, непрерывных на сегменте, ограничимся формулировками и пояснениями, не проводя доказательств (доказательства см., например, в [6], т. 1).

Теорема 1 (теорема Вейерштрасса о достижении функцией своего наибольшего и наименьшего значений. Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик). *Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a; b]$, достигает в этом сегменте своего наибольшего и своего наименьшего значений, т. е. существуют такие точки x_1 и x_2 отрезка $[a; b]$, что для всех x из $[a; b]$ выполняются неравенства $f_1(x) \ge f(x)$ и $f(x) \ge f(x_2)$.*

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она ограничена на нем, т. е. существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ при $a \le x \le b$.*

Доказательство. Обозначим через m и $\tilde{m}$ соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a; b]$. Тогда для любого x, принадлежащего сегменту $[a; b]$,

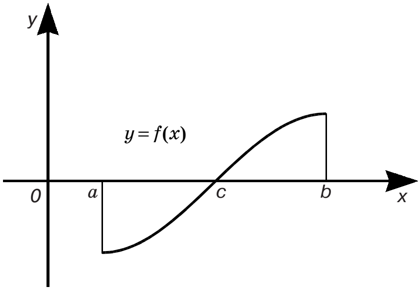


Рис. 80

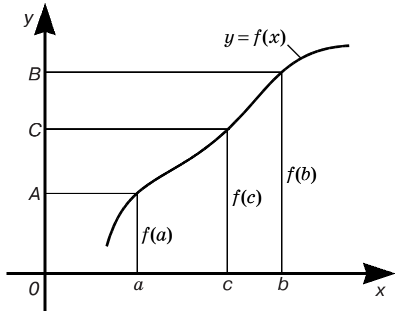


Рис. 81

имеют место неравенства $\tilde{m} \le f(x) \le m$. Пусть M — наибольшее из чисел $|\tilde{m}|$, $|m|$. Тогда $|f(x)| \le M$ при $a \le x \le b$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется точка c, такая, что $f(c) = 0$.*

Эта теорема имеет простой геометрический смысл (рис. 80): если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, то она пересекает ось Ox.

Теорема 3 (теорема Коши о промежуточных значениях. Огюстен Коши (1789–1857) — французский математик). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри этого сегмента такая точка c, что $f(c) = C$.*

Эта теорема геометрически очевидна. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 81). Так как $f(x) = A$, $f(b) = B$, то прямая $y = C$, где C — любое число, заключенное между A и B, пересечет его по крайней мере в одной точке.

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

7.7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними. К комплексным числам обычно приходят, рассматривая уравнение $x^2 + 1 = 0$. Очевидно, не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Корнями его (как и целого ряда других уравнений) оказываются комплексные числа.

Под *комплексным числом* понимается выражение:

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где x и y — действительные числа, а i — *мнимая единица*.

Числа $x + i0 = x$ отождествляются с действительными числами; в частности, $0 + i0 = 0$. Числа $0 + iy = iy$ называются *чисто мнимыми*.

Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* числа z и обозначаются следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Под *модулем* комплексного числа z понимается неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу (1) называется комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел определяются следующим образом:

I. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

II. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Отсюда, в частности,

$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$,

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

III. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$.

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат xOy (рис. 82). Так как комплексное число $z = x + iy$ является парой $(x; y)$ действительных чисел, каждой паре $(x; y)$ действительных чисел соответствует одна точка плоскости и наоборот (см. 1.1, п. 1), то каждую точку $(x; y)$ плоскости можно принять за изображение комплексного числа $z = x + iy$. В этом случае эта плоскость называется *комплексной плоскостью*, а z — *точкой* этой плоскости.

На оси Ox расположены действительные числа: $z = x + i0 = x$; поэтому она называется действительной осью. На оси Oy распо-

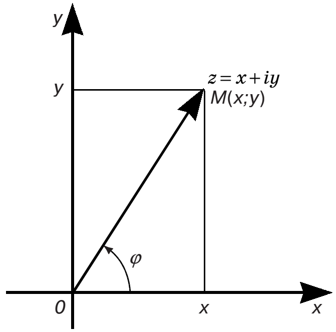


Рис. 82

ложены чисто мнимые числа: $z = 0 + iy = iy$, она называется мнимой осью.

Заметим, что $r = |z|$ представляет собой расстояние от точки z до начала координат (см. 1.2, п. 1).

Удобной является интерпретация комплексного числа $z = x + iy$ как радиус-вектора $\overline{OM}$ (рис. 82). Очевидно, каждому радиус-вектору плоскости с концом в точке $M(x;\, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + i0$.

Положение точки x на плоскости, кроме ее прямоугольных координат x, y, может быть определено также и полярными координатами r, φ, при этом (см. 1.1., п. 2):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Число φ будем называть *аргументом* комплексного числа z. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли его отсчет от положительного направления действительной оси против или по часовой стрелке соответственно.

По заданной точке z ее модуль определяется единственным образом, а аргумент — *с точностью до слагаемого* $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Значение аргумента φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называется *главным* и обозначается $\arg z$.

Точка $z = 0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Из формул (2) получается тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Пользуясь записью (3) для комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

имеем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\quad (r_2\neq 0).$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

4. Возведение в степень и извлечение корня. Следствием формулы (4) является формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{5}$$

где n — натуральное число.

Пусть

$$\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),$$

где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда на основании формулы (5) имеем

$$z = (\rho(\cos\psi + i\sin\psi))^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда

$$\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2),$$

и, следовательно,

$\rho=\sqrt[n]{r}$ (под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня), $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$.

Здесь в качестве k достаточно брать лишь значения $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, так как при прочих значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Таким образом, окончательно

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{6}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n - 1.$$

Пример. Найти $\omega=\sqrt{-1}$.

Так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то на основании формулы (6) имеем:

$$\sqrt{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2},\quad k=0,1.$$

Отсюда

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\quad \omega_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

5. Формула Муавра. Формула Эйлера; выражения тригонометрических функций через показательную функцию. Формула (5) может быть переписана в виде

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Полагая здесь $r = 1$, получим формулу:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра* (Авраам Муавр (1667–1754) — английский математик).

Справедлива и следующая формула:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

называемая *формулой Эйлера* (Леонард Эйлер (1707–1783) — великий математик, большую часть своей жизни провел в России, по происхождению швейцарец). Ее справедливость будет установлена позднее (см. 10.3).

6. Разложение многочленов на множители. Пусть

$$P_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n \qquad (7)$$

многочлен степени n (т. е. $A_n \neq 0$) с вещественными коэффициентами A_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Число a (действительное или комплексное), такое, что $P_n(a) = 0$, называется *корнем многочлена* (7).

Из курса алгебры известно, что число a тогда и только тогда будет корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x)$ делится на $x - a$.

Если $P_n(x)$ делится на $(x - a)^k$ (k — натуральное) и не делится на $(x - a)^{k+1}$, то число k называется *кратностью* корня a.

Известно также, что всякий многочлен (7) степени n можно представить, и притом единственным образом, в следующем виде:

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_m)^{k_m},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — различные корни многочлена (7), а числа k_1, $k_2, \ldots, k_m$ — кратности соответственно корней $a_1, a_2, \ldots, a_m$, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Заметим, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет корнем комплексное число $a = b + ic$ кратности k, то (см. [7]) сопряженное комплексное число $\bar{a} = b - ic$ также является корнем многочлена той же кратности.

Имеем:

$(x-a)(x-\bar{a}) = (x-(b+ic))\,(x-(b-ic)) = ((x-b)-ci)((x-b)+ci) =$
$= x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = x^2 + px + q,$

где $p = -2b$, $q = b^2 + c^2$, причем $(p^2/4) - q < 0$.

Следовательно, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Таким образом, многочлен (7) можно представить в следующей форме:

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_r)^{\lambda_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \times$$
$$\times (x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}. \qquad (8)$$

Здесь линейные двучлены соответствуют действительным корням ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — их кратности), а квадратные трехчлены — комплексным корням ($l_1, l_2, \ldots, l_s$ — их кратности) многочлена. При этом $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_r + 2l_1 + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$,

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

7. Применение комплексных чисел в расчете физических величин. Так как комплексные числа геометрически представляются векторами на плоскости, то все векторные физические величины могут быть охарактеризованы при помощи комплексных чисел. Представление векторных физических величин комплексными числами облегчает выполнение расчетов этих величин. При этом действия над векторами, которые выполняются графическим путем, заменяются соответствующими действиями над комплексными числами, что значительно проще.

Особенно широкое применение комплексные числа получили в электротехнике при расчете электрических цепей.

Отметим, что в электротехнике мнимая единица i обозначается буквой j, так как буквой i традиционно обозначается сила тока в цепи.

Рассмотрим один пример. На рис. 83 дана векторная диаграмма неразветвленной цепи переменного тока. Пусть вектор $\overline{OM}$ представляет вектор напряже-

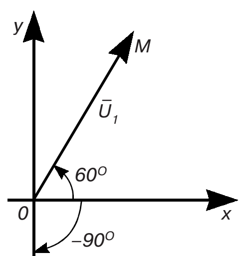


Рис. 83

ния $\overline{U}_1$, модуль которого $|\overline{U}_1| = 220$ (В); вектор $\overline{ON}$ представляет вектор напряжения $\overline{U}_2$, модуль которого $|\overline{U}_2| = 127$ (В). Тогда $\overline{U}_1 = 220\,(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = 110 + 190{,}5j$. Также

$$\overline{U}_2 = 127\,(\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)) = -127j.$$

Если электрическая цепь составлена из двух последовательно включенных участков с напряжениями $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$, то на зажимах будем иметь напряжение $\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 = 110 + 190{,}5j - 127j = 110 + 63{,}5j$.

Аналогично применяются комплексные числа при выражении других характеристик электрических цепей.

Заметим, что в электротехнике модуль $|\overline{U}|$ вектора напряжения называется просто напряжением и обозначается через U, а соответствующее этому вектору комплексное число называется *комплексом* напряжения и обозначается $\dot{U}$ (ставится точка над символом).

Упражнения

1. Дано $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$. Найти $f(1)$.

$$\left[f(1) = \frac{1}{4}.\right]$$

2. Дано $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Показать, что $f(2) = f(3) = 0$.

3. Найти значения функции $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$ для значений аргумента, равных -1; 0; 1; 2.

$$\left[f(-1) = -\frac{1}{2};\quad f(0) = 1;\quad f(1) = \frac{3}{2};\quad f(2) = 1.\right]$$

4. Полагая $f(x) = \cos 2x$, вычислить $f(0)$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$$\left[f(0) = 1;\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;\quad f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$$

5. Найти области определения функций:

$y = 3\sqrt{4 - x^2}$. [[−2; 2].]

$y=\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$. [(−5; 5).]

$y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$. [(2; 5).]

$y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. [[−3; 7].]

$y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$. [(−∞; +∞).]

$y = x \arcsin x$. [[−1; 1].]

$y = 2^x$. [(−∞; +∞).]

$y=\dfrac{1+x}{1-x}$. [($x \neq 1$).]

6. Построить графики функций:

а) $y = 3x + 5$; б) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$; в) $y = 4 - 4x^2$;

г) $y=\dfrac{5}{x}$; д) $y = x^3 + 1$; е) $y = \sin 2x$;

ж) $y = \cos 3x$; з) $y=\sin\dfrac{x}{2}$; и) $y=\cos\dfrac{x}{3}$;

к) $y = 2\operatorname{tg} x$; л) $y = 4 \sin x$; м) $y = 5 \cos x$.

7. Изобразить точками на плоскости следующие последовательности, заданные общими членами:

а) $a_n=\dfrac{1}{n+1}$; б) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$; в) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$;

г) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$; д) $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$.

Вычислить указанные пределы.

8. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+6x+8)$. [0.]

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. [3.]

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. [−1.]

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. [3.]

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{7x}$. $\left[-\dfrac{1}{7}.\right]$

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$. [2.]

14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x^2+6}{x^2-7x+10}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

15. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. [−8.]

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$. [1.]

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$. [1.]

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. $\left[\dfrac{15}{2}.\right]$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. [3.]

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$. $\left[\dfrac{5}{2}.\right]$

29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. $\left[\dfrac{12}{5}.\right]$

30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(\sqrt{x-1}-2)^2}{(x-5)^2}$. $\left[\dfrac{1}{16}.\right]$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^3}{x^3}$. [−1.]

32. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^3-n+1}{2n^3+n^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

33. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$. [0.]

34. $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$. [0.]

35. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. [$\infty$.]

36. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

37. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. [$e$.]

38. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

39. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n}$. [$e^4$.]

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

41. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. [$e$.]

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. [1.]

43. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$. [$e^2$.]

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$. [2.]

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. [2.]

46. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$. [0.]

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{x}$. [2.]

49. $\lim\limits_{n\to \infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$. [$x$.]

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$. $\left[\dfrac{m}{n}.\right]$

51. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

52. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$. [$e$.]

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x}$. [0.]

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[4]{1+x^2}-1)\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}}{x}$. [0.]

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)\cos\pi x}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

56. $\lim\limits_{x\to 0}x\mathrm{ctg}x$. [1.]

57. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{ctg}^2x}$. [$e^3$.]

58. Найти $(3 + 5i)(4 - i)$. $[17 + 17i.]$

59. Найти $(6 + 11i)(7 + 3i)$. $[9 + 95i.]$

60. Найти $\frac{3-i}{4+5i}$. $\left[\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i.\right]$

61. Найти а) $(4 - 7i)^2$, б) i^{10}. [а) $-33 - 56i$, б) -1.]

62. Представить числа i; -2; $-i$; $1 + i$; $1 - i$ в тригонометрической форме.

$$\left[\begin{array}{l} i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}, \\ -2=2(\cos\pi+i\sin\pi), \\ -i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ 1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{array}\right]$$

Найти все значения для указанных радикалов.

63. $\sqrt[3]{1}$. $\left[1;\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

64. $\sqrt[4]{1}$. $[1;\ i;\ -1;\ -i.]$

65. $\sqrt{-5-12i}$. $[2 - 3i;\ -2 + 3i.]$

Глава 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о скорости движущейся точки. Пусть $s = s(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t. Обозначим через Δs путь, пройденный за промежуток времени Δt от момента t до $t+\Delta t$, т. е. $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Отношение $\Delta s/\Delta t$ называется *средней скоростью* точки за время от t до $t + \Delta t$. Чем меньше Δt, т. е. чем короче промежуток времени от t до $t + \Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие скорости v в данный момент t, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0: v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Величина v называется *мгновенной скоростью* точки в данный момент t.

З а д а ч а о к а с а т е л ь н о й к д а н н о й к р и в о й. Пусть на плоскости xOy дана кривая уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти только угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg} \varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 84).

Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M'(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ проведем секущую M_0M'. Из рисунка 84 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ с секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: *касательной к кривой в точке M_0* называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

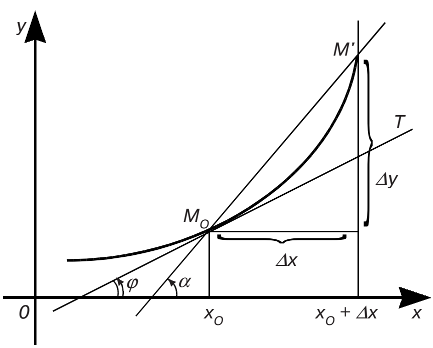


Рис. 84

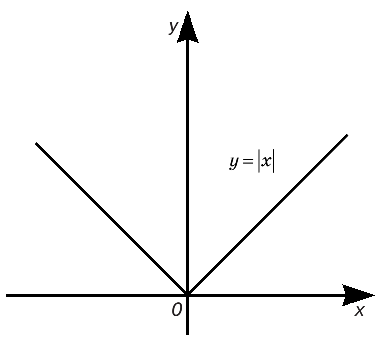


Рис. 85

2. Определение производной. Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных вопросов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$. Возьмем какое-нибудь значение x из $(a; b)$. Затем возьмем новое значение аргумента $x + \Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, где

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Теперь составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно является функцией от Δx.

Если существует предел отношения $\Delta y/\Delta x$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ в данной точке x и обозначается через y' или $f'(x)$ (читается: «Игрек штрих» или «Эф штрих от икс»):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Для обозначения производной принят также и следующий символ: $\dfrac{dy}{dx}$ (читается: «Дэ игрек по дэ икс»). Этот символ надо рассматривать пока как целый символ, а не как частное.

Если существует предел справа $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (или предел слева $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$), то он называется *правой* (или *левой*) производной функции $f(x)$ в точке x.

Действие нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в точке x, называют *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке. При этом если промежуток от a до b есть отрезок $[a; b]$, то в точке a идет о правой производной, а в точке b — о левой производной.

Пример 1. Найти производную функции $y = C$, где C — постоянная.

Имеем $y+\Delta y=C$, $\Delta y=0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т. е. $y'=0$. Следовательно, производная постоянной равна нулю: $(C)'=0$.

Пример 2. Найти производную функции $y=x$.

Имеем $y+\Delta y=x+\Delta x$, $\Delta y=\Delta x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, т. е. $y'=1$. Итак, $(x)'=1$.

Пример 3. Найти производную функции $y=\sin x$.

Имеем $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$, $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$ (здесь используется формула (9) из 7.5 и непрерывность функции $\cos x$). Следовательно, $(\sin x)'=$ $=\cos x$.

Из рассмотренных выше задач, проводящих к понятию производной, следует:

1. Скорость v *прямолинейного движения есть производная пути* s *по времени* t: $v=\frac{ds}{dt}$.

В этом состоит *механический* смысл производной. По аналогии с этим производную любой функции часто называют скоростью изменения этой функции.

2. *Угловой коэффициент касательной к кривой* $y=f(x)$ *в точке с абсциссой* x_0 *есть производная* $f'(x_0)$. В этом состоит *геометрический* смысл производной.

Поэтому с учетом формулы (9) из 1.4 уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ точке $M_0(x_0;\, y_0)$ примет вид:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Нормально к кривой в некоторой ее точке называется перпендикуляр к касательной к этой кривой в той же точке. Следовательно, если $f'(x_0)\neq 0$, то, имея в виду формулу (11) из 1.4, уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ можно записать так:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Теорема. *Если функция* $y=f(x)$ *дифференцируема в некоторой точке* x, *то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Согласно формуле (1) (8.1) и теореме 1 (7.5, п. 1), имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая. Отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в данной точке x.

Примечание. Обратное утверждение уже не имеет места, что видно из следующего примера.

Пример 4. Функция $y = |x|$, график которой приведен на рис. 85, непрерывна в точке $x = 0$, но ясно, что в этой точке в соответствии с геометрическим смыслом производной функция $y = |x|$ не дифференцируема, так как в ней нет определенной касательной.

8.2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Вывод общих правил дифференцирования. Пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'.

Производная суммы. Пусть $y = u + v$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v),\ \Delta y = \Delta u + \Delta v,$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, т. е. $y' = u' + v'$, или $(u + v)' = u' + v'$.

Примечание 1. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

Производная произведения. Пусть $y = uv$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta v \cdot \Delta u,$$

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = vu' + uv' + u' \cdot 0,$$

т. е. $y' = u'v + uv'$ или

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{1}$$

При выводе формулы воспользовались тем, что в силу непрерывности функции v (ее непрерывность следует из ее дифференцируемости) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Вынесение постоянного множителя за знак производной. Так как $(C)' = 0$ (см. 8.1, п. 2, пример 1), то из формулы (1) непосредственно получаем:

$$(Cu)' = Cu'.$$

Производная частного. Пусть $y=\dfrac{u}{v}$, где $v\neq 0$. Тогда имеем:

$$\Delta y + y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}, \quad \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v-(v+\Delta v)u}{(v+\Delta v)v} =$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)v} = \frac{vu'-uv'}{(v+0)v},$$

т. е. $y' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Производная сложной функции. Пусть $y=f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, а $\varphi(x)$ — по x. Требуется найти производную y по x. Имеем: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ (предполагается, что Δu при достаточно малых значениях Δx не обращается в нуль), откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \qquad (2)$$

Производная обратной функции. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции. Тогда если функция $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

или, короче,

$$x_y{}' = \frac{1}{y_x{}'}. \qquad (3)$$

Действительно, так как $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, то $x = \varphi(f(x))$. Отсюда, используя формулу (2) дифференцирования сложной функции, получаем:

$$1 = \varphi'(y)(f'(x),$$

откуда и следует искомая формула (3).

2. Производные элементарных функций. Пусть u, как и выше, — функция аргумента x, имеющая производную u'.

Производные тригонометрических функций. Как установлено ранее (8.1, п. 2, пример 3),

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Отсюда, с учетом формулы (2),

$$(\sin u)' = u' \cos u. \qquad (4)$$

На основании формулы (4) имеем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Отсюда с учетом формулы (2) получаем:

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

Далее имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда, с учетом формулы (2),

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Используя формулу (5), находим:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отсюда, с учетом формулы (2), $(\operatorname{ctg} u)' = -u'/\sin^2 u$.

Производная логарифма. Пусть $y = \ln x$. Тогда имеем:

$$y+\Delta y=\ln(x+\Delta x),\quad \Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пользуясь известным пределом $e=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$ (7.3, примечание), будем иметь: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}$, т. е. $y'=\frac{1}{x}$, или

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Пусть теперь $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$). Тогда $a^y=x$. Отсюда $y\ln a = \ln x$, или $y=\frac{\ln x}{\ln a}$, откуда, согласно формуле (6),

$$y'=\frac{1}{x\ln a},$$

или

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{7}$$

Из формул (6), (7) с учетом формулы (2) получаем:

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}, \tag{8}$$

$$(\log_\alpha u)'=\frac{u'}{u\ln a}.$$

В частности,

$$(\lg u)'=(\log_{10} u)'=\frac{u'}{u\ln 10}.$$

Пример 1. $y=\ln\cos x$, $y'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$.

Производная степенной функции. Пусть $y = x^\alpha$ (α — действительное число и $x > 0$. Тогда $\ln y = \alpha \ln x$ и, согласно формуле, (8) $\frac{y'}{y}=\alpha\frac{1}{x}$. Отсюда $y'=\alpha y\frac{1}{x}=\alpha x^\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$, т. е.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{9}$$

Формула (9) верна и в случае, когда функция $y = x^a$ определена на всей числовой оси (например, когда α — натуральное число).

Из формулы (9) с учетом формулы (2) получаем:

$$(u^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}u'.$$

Пример 2. Если $y=\sqrt{\sin x}$, то $y'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Производная показательной функции. Пусть $y=a^u$ $(0 <$ $< a < \neq 1)$. Тогда In $y = u$ In a и согласно формулам (8), (10)

$\dfrac{y'}{y}=u'\ln a$. Отсюда

$$y' = yu'\text{In } a = a^u u'\text{In } a,$$

т. е.

$$(a^u)' = a^u u'\text{In } a.$$

В частности,

$$(e^u)' = e^u u'.$$

Пример 3. $y=2^{x^2}$, $y'=2^{x^2}\cdot 2x\ln 2=2^{x^2+1}x\ln 2.$

Произвольные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$. Поэтому по правилу дифференцирования обратной функции получаем:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким же приемом получаем:

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(0<y<\pi\right),$$

$$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{(\mathrm{tg}\,y)'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\mathrm{arcctg}\,x)'=\frac{1}{(\mathrm{ctg}\,y)'_y}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда с учетом формулы (2) получаем:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Пример 4. $(\operatorname{arc\,tg} x^2)' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}.$

Для удобства нахождения производных различных функций сведем все правила и формулы дифференцирования в одну таблицу.

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0.$
2. $(u + v)' = u' + v'.$
3. $(uv)' = u'v + uv'.$
4. $(Cu)' = Cu'.$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$
6. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'.$
7. $(a^u)' = a^u u' \ln a.$
8. $(e^u)' = e^u u'.$
9. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$
11. $(\sin u)' = u' \cos u.$
12. $(\cos u)' = -u' \sin u.$
13. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$
14. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$
15. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
16. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
17. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$
18. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

8.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие дифференциала. Из определения производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

с учетом теоремы 1 (7.5, п. 1) получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \qquad (1)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части равенства (1) на Δx:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Пусть $y' \neq 0$. Тогда первое слагаемое $y'\Delta x$ линейно по Δx, поскольку y' не зависит от Δx. При $\Delta x \to 0$ это слагаемое бесконечно мало, но порядок его малости ниже порядка малости второго слагаемого, так как для всех значение $y' \neq 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 0.$$

Поэтому слагаемого $y'\Delta x$ является главной частью приращения функции. Это слагаемое называют *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначают символом dy или $df(x)$. Итак, $dy = y'\Delta x$.

2. Геометрический смысл дифференциала. Для выяснения геометрического смысла дифференциала к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ проведем касательную MT, обозначив через φ ее угол наклона к положительному направлению оси Ox (рис. 86).

Так как $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$, то $dy = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$. Поэтому из треугольника MLN следует, что дифференциал dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

Замечая, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т. е. что дифференциал независимой переменной равен ее приращению, получаем:

$$dy = y'\,dx. \qquad (2)$$

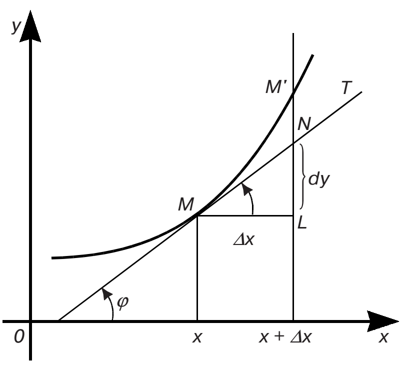


Рис. 86

Таким образом, дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал (или приращение) независимой переменной.

Из формулы (2) имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функция равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу аргумента.

3. Дифференциал сложной функции. Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, $\varphi(x)$ — по x. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\varphi'(x).$$

Следовательно,

$$dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx.$$

Но

$$\varphi'(x)dx = du.$$

Поэтому

$$dy = f'(u)du.$$

Таким образом, дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы промежуточный аргумент ее был независимой переменной. Иначе говоря, форма записи дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью* формы *дифференциала*.

Пример. Найти dy сложной функции

$$y = \sin u, \quad u = \sqrt{x}$$

Имеем:

$$dy = \cos u\, du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos u\, dx.$$

4. Таблица формул для дифференциалов. Согласно формуле (2) для получения дифференциала нужно умножить производную на dx (дифференциал независимой переменной). Это позволяет нам из таблицы формул для производных сразу получить соответствующую таблицу формул для дифференциалов. Например, из формулы $(u + v)' = u' + v'$, *умножив обе части на* dx, получим:

$$(u + v)'\,dx = u'dx + v'dx, \text{ или } d(u + v) = du + dv.$$

8.4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Производные высших порядков. Производная $y' = f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y = f(x)$, называемая *производной первого порядка*, представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* или *второй производной* и обозначается так: $y'' = (y')'$ или $f''(x)$. Аналогично если существует производная от производной второго порядка, то она называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается так: $y''' = (y'')'$ или $f'''(x)$ и т. д.

Вообще производная от производной порядка $n - 1$ называется *производной n порядка* и обозначается $y^{(n)} = (y^{n-1})'$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой n раз*, если существуют ее производные до порядка n включительно, и эти производные непрерывны.

Производные четвертого, пятого и более высоких порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI} и т. д. В таком случае порядок производной можно писать без скобок.

Примеры. 1) $y = x^k$, $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$, ..., $y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$; если k — натуральное число, то

$$y^{(k)} = k! \text{ и } y^{(k+1)} = y^{(k+2)} = \ldots = 0.$$

2) $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

3) $y = a^x$, $y' = a^x\ln a$, $y'' = a^x\ln^2 a$, ..., $y^{(n)} = a^x\ln^n a$.

4) $y = \ln x,\quad y' = \dfrac{1}{x},\quad y'' = -\dfrac{1}{x^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{(-1)\cdot(-2)\ldots(-n+1)}{x^n} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}.$

5) $y = \sin x,\quad y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right),\quad y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right), \ldots$

$\ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right).$

Совершенно аналогично устанавливается формула:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

На случай производных любого порядка легко обобщаются правила дифференцирования суммы и вынесения постоянного множителя за знак производной (8.2, п. 1):

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \ (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

2. Физический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ — уравнение прямолинейного движения материальной точки. Как установлено ранее (см. 8.1,п. 1, 2), мгновенная скорость v этого движения есть производная пути s по времени t, т. е. $v = ds/dt$. Если теперь эту скорость рассматривать как функцию времени, то так же, как и п. 1 (8.1), установим, что dv/dt есть ускорение a в момент t. Таким образом, получаем, что $a = s''$, т. е. вторая производная пути s по времени t есть ускорение a движущейся точки в момент t. В этом и заключается физический смысл второй производной.

Задача. Точка движется по прямой по закону $s = t^3$, где s — путь (см), а t — время (с). Найти скорость и ускорение движения точки в момент $t = 2c$.

Решение. Имеем: $v = s' = 3t^2$, $a = s'' = 6t$.

В частности, при $t = 2c$ $v = 12$ см/с и $a = 12$ см/с^2.

3. Дифференциалы высших порядков. Пусть имеем функцию $y = f(x)$, где x — независимая переменная. Дифференциал этой функции

$$dy = y = f'(x)\, dx$$

есть некоторая функция от x, но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель является приращением независимой переменной x и от значения этой переменной не зависит. Так как dy есть функция от x, то мы имеем право говорить о дифференциале этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* этой функции и обозначается через d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Найдем выражение второго дифференциала. В силу определения дифференциала имеем:

$$d^2y = (f'(x)dx)'\, dx.$$

Так как dx от x не зависит, то dx при дифференцировании выносится за знак производной, и мы получаем:

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

Принято, записывая степень дифференциала, опускать скобки; так, например, вместо $(dx)^2$ принято писать dx^2, подразумевая под этим квадрат выражения dx; вместо $(dx)^3$ пишут dx^3 и т. д.

Вообще *дифференциалом n-го порядка* называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}\,y) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда получается другая запись для n-й производной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

8.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Будем говорить, что переменная у как функция аргумента x задана *параметрически*, если обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. При этом указанную переменную t обычно называют *параметром*.

Примеры такого задания функций уже встречались (см. 1.6, п. 2).

Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по параметру t в рассматриваемом промежутке изменения этого параметра. Кроме того, будем считать также, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, что позволяет рассматривать переменную y как функцию переменной x.

Рассмотрим вопрос о вычислении производных функции $y = y(x)$ по аргументу x. Имеем (в силу инвариантности формы первого дифференциала; 8.3 п. 3)

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \psi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$y' = (x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{2}$$

Для вычисления второй производной $y''(x)$ представим ее (в силу инвариантности формы первого дифференциала) в виде

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx}. \qquad (3)$$

Теперь, используя в правой части (3) формулу (2), третью из формул (1) и правило дифференцирования частного, получим:

$$y''(x) = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \qquad (4)$$

По такому же принципу вычисляются производные третьего и последующих порядков.

Пример. Вычислить первую и вторую производные функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t)\ (-\infty < t < +\infty).$$

Как известно (1.6, п. 2), кривая, определяемая этими уравнениями, называется циклоидой. Пользуясь формулами (2) и (4), получим

$$y'(x) = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''(x) = \frac{\left(ctg\dfrac{1}{2}\right)'}{R(1-\cos t)} = -\frac{1}{4R\sin^4\dfrac{t}{2}}$$

($t \neq 2\pi k$, где k — целое число).

8.6. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Теорема Ферма. (Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик). *Если функция $y = f(x)$, определенная в интервале $(a; b)$, достигает в некоторой точке c этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения и существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Допустим, что в точке c функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению c достаточное малое приращение Δx. Тогда $f(c + \Delta x) < f(c)$. Отсюда при

$\Delta x < 0 \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} > 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\geq 0. \qquad (1)$$

При $\Delta x > 0$ $(\Delta y/\Delta x) < 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c)\leq 0. \qquad (2)$$

Из неравенства (1) и (2) следует, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл заключения теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна оси абсцисс (рис. 87).

2. Теорема Ролля (Мишель Ролль (1652–1719) — французский математик). *Если функция* $y = f(x)$, *непрерывная на сегменте* $[a; b]$ *и дифференцируемая в интервале* $(a; b)$, *принимает на концах этого сегмента равные значения* $f(a) = f(b)$, *то в интервале* $(a; b)$ *существует точка* c, *такая, что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то, как известно (см. 7.6, п. 3, теорема 1), она принимает на этом сегменте как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m. Возможны только два случая.

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a; b]$: в самом деле, неравенство $m \leq f(x) \leq M$ в этом случае дает $f(x) = M$ для всех x из $[a; b]$. Поэтому в любой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) = 0$.

2. $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно из значений M и m достигается в некоторой точке c $(a < c < b)$. Следовательно, согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси абсцисс (рис. 88).

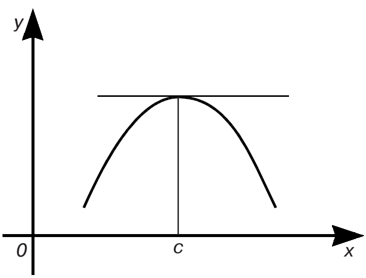


Рис. 87

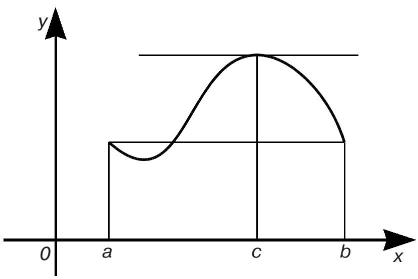


Рис. 88

3. Теорема Лагранжа (Жозеф-Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик). *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a; b]$ *и дифференцируема в интервале* $(a; b)$, *то в интервале* $(a; b)$ *найдется такая точка* c, *что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{3}$$

Доказательство. Положим:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lambda \tag{4}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$.

Эта функция удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля как алгебраическая сумма трех непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ применима теорема Ролля, т. е. существует точка $a < c < b$, такая, что $\varphi'(c) = 0$. Но $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$. Поэтому $f'(c) - \lambda = 0$, или $\lambda = f'(c)$. Отсюда с учетом формулы (4) получаем искомое равенство (3).

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 89): на графике функции $y = f(x)$ между точками A и B есть внутренняя точка C, такая, что касательная к нему в точке C параллельна хорде AB. В самом деле, левая часть равенства (3) — угловой коэффициент хорды AB, а правая — угловой коэффициент касательной к графику в точке C.

Примечание 3. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a) = f(b)$, то из равенства (3) следует $f'(c) = 0$.

Формула (3) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Из нее получаем $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Наконец, взяв вместо a и b соответственно x_0 и x и обозначив $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) -- f(x_0)$, формулу Лагранжа запишем так:

$$\Delta y = f'(c)\Delta x.$$

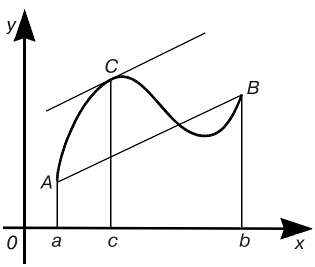


Рис. 89

Из теоремы Лагранжа вытекает

Следствие: *Если* $f'(x) = 0$ *в интервале* $(a; b)$, *то в этом интервале функция* $f(x)$ *постоянна.*

Доказательство. Для любых значений x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из рассматриваемого интервала выполняется теорема Лагранжа, т. е. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Но $f'(c) = 0$, а потому и $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т. е. $f(x_2) - f(x_2)$, а это значит, что $f(x) = \text{const}$ в интервале $(a; b)$.

4. Правило Лопиталя. В гл. 7 (см. 7.5; п. 2) мы познакомились с некоторыми приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших, т. е. раскрытия неопределенности соответственно вида 0/0 или ∞/∞. Здесь будет рассмотрен новый простой прием для раскрытия этих неопределенностей, называемый *правилом Лопиталя* (Гильом Лопиталь (1661–1704) — французский математик).

Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a. Пусть далее эти функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими.

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует, т. е.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство см., например, в [8].

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x} = \ln 2.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1.$

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}.$

Примечание. Правило Лопиталя верно и в том случае, когда a — символ ∞.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$

8.7. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. МАКСИМУМ И МИНИМУМ

1. Возрастание и убывание функций. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале $(a; b)$, если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого интервала, из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1)$). Если же для таких x_1 и x_2 следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f(x_2) \leq f(x_1)$), то функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) в интервале $(a; b)$.

Функции всех этих типов носят общее название *монотонные.*

Монотонные функции часто встречаются в различных исследованиях. Например, освещенность, меняющаяся по мере удаления от источника света, — монотонно убывающая функция расстояния.

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$, *дифференцируемая в интервале* $(a; b)$, *неубывающая* (*невозрастающая*) *на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна)*, т. е.

$$f'(x) \geq 0 \ (f'(x) \leq 0).$$

Доказательство. Пусть x — произвольное значение из интервала $(a; b)$. Придадим этому значению x приращение Δx, такое, чтобы точка $x + \Delta x$ принадлежала интервалу $(a; b)$. Если $f'(x)$ — неубывающая функция, то $\Delta y \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \leq 0$ при $\Delta < 0$. В обоих случаях $(\Delta y/\Delta x) \geq 0$, и, следовательно $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) \geq 0.$ Если же $f(x)$ — невозрастающая функция, то $(\Delta y / \Delta x) \leq 0$ и $f'(x) \leq 0$.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$, *дифференцируемая в интервале* $(a; b)$, *удовлетворяет в нем условию* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, *то эта функция возрастает (убывает) в интервале* $(a; b)$.

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа для произвольных x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из $(a; b)$ имеем: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Следовательно, если $f'(x) > 0$ в $(a; b)$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$, и заданная функция возрастает в $(a; b)$. Если же $f'(x) < 0$ в $(a; b)$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$, или $f(x_2) < f(x_1)$, и данная функция убывает.

Приведем несколько примеров исследования функций на возрастание и убывание.

Пример 1. Функция $y = e^x$ всюду возрастает, так как $y' = e^x > 0$ для всех x.

Пример 2. Функция $y = x^2$ убывает в промежутке $(-\infty; 0)$, так как в этом промежутке $y' = 2x < 0$. Эта же функция в промежутке $(0; \infty)$ возрастает, так как в последнем промежутке $y' = 2x > 0$.

2. Максимумы и минимумы функций.

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* (*минимум*), если существует такая окрестность точки $x_0(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x_0) < f(x)$).

Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если для достаточно малого приращения Δx (любого знака) выполняется неравенство:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)\ (f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции.

По определению максимумов и минимумов функции они могут достигаться лишь внутри области определения, концы сегментов области определения не могут служить точками, в которых функция принимает экстремум.

На рис. 90 изображен график функции, которая принимает в точке x_1 максимум, а в точке x_2 минимум.

Если исследуемая на экстремум функция дифференцируема, то изучение свойств ее производной дает возможность находить точки, в которых функция принимает экстремум.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, имеет в точке x_0, $a < x_0 < b$ экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0. \tag{1}$$

Эта теорема есть непосредственное следствие теоремы Ферма.

Примечание. Условие (1), будучи необходимым условием экстремума, не является достаточным условием экстремума, что показывает следующий пример.

Пример 1. Функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$ (разность $f(x) - - f(0)$ меняет знак при изменении знака аргумента x), хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

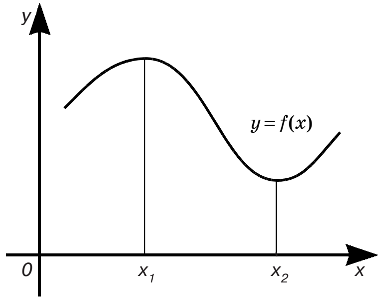


Рис. 90

Теорема 2 (достаточное условие существования экстремума). *Если производная функции $f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль* (такие точки называются *стационарными*) *и при переходе через эту точку в направле-*

нии возрастания x меняет знак «плюс» («минус») на «минус» («плюс»), то в точке x_0 эта функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку x_0 производная функции f(x) не меняет знака, то в этой точке функция f(x) экстремума не имеет.

Доказательство. Допустим, что $f'(x)$ меняет знак «плюс» на «минус». Тогда, согласно теореме 2 п. 1, в достаточно малой окрестности точки x_0 слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает и $f(x) < < f(x_0)$, а справа от нее функция $f(x)$ убывает и снова $f(x) < f(x_0)$. Следовательно, для всех x из достаточно малой окрестности точки x_0 (кроме самой этой точки) будет выполняться неравенство $f(x) < f(x_0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичное доказательство и в случае обратной смены знака.

Предположим теперь, что при переходе через точку x_0 производная функция $f(x)$ не меняет знака. Тогда по теореме 2 п. 1 как слева, так и справа от x_0, функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает, следовательно, не может иметь экстремума в точке x_0.

Отсюда следует такое *правило исследования функции на экстремум* с помощью первой производной. Пусть в интервале $(a; b)$ дана дифференцируемая функция $f(x)$:

1) находим ее производную $f'(x)$;

2) находим корни уравнения $f'(x) = 0$;

3) выясняем знак $f'(x)$ слева и справа от каждого из этих корней и согласно теореме 2 выносим заключение об экстремуме;

4) вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример. 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Для этого вычисляем производную $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$ и находим корни уравнения $f'(x) = 0$. Имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Затем согласно полученному правилу последовательно заполняем строки таблицы.

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$		Максимум $f(x_1) = 4$		Максимум $f(x_2) = 0$	

3. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. Следующая теорема является вторым достаточным условием существования экстремума.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ непрерывная в точке x_0, то (см. 7.6, п. 1, теорема 5) $f''(x) > 0$ и в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности точки x_0 функция $z = f'(x)$ возрастает, так как $z' = f''(x) > 0$. Но $f'(x_0) = 0$. Следовательно, при переходе через точку x_0, в направлении возрастания x $f'(x)$ меняет знак «минус» на «плюс», и потому согласно теореме 2 п. 2 настоящего параграфа $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум. Доказательство в случае $f''(x_0) < 0$ аналогично.

Эта теорема позволяет сформулировать *второе* правило отыскания экстремума функции, в котором меняется лишь пункт 3. Этот пункт заменяется на следующий:

3) находим вторую производную $f''(x_0)$, вычисляем ее значения для каждого из найденных корней уравнения $f'(x_0) = 0$ и согласно теореме выносим заключение об экстремуме.

Заметим, что пользоваться вторым правилом обычно проще, чем первым. Но если вторая производная при значении корня первой производной обращается в нуль, то используют первое правило отыскания экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Имеем $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Как уже отмечалось (см. пример 2 предыдущего пункта), корни уравнения $f(x) = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. В точке $x_1 = -1$ функция $f(x)$ имеет максимум, так как $f''(-1) = -6 < 0$, а в точке $x_2 = 1$ — минимум, так как $f''(1) = 6 > 0$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда (см. 7.6, п. 3, теорема 1) на этом отрезке функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значений. Если эта функция достигает наибольшего значения в интервале $(a; b)$, то оно, очевидно, будет максимумом функции $f(x)$. Но функция может достигать своего наибольшего значения также на одном из концов отрезка $[a; b]$ (см. рис. 80). Таким образом, чтобы найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо найти на интервале $(a; b)$ все максимумы этой функции, затем вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее из всех этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Замечание. Очевидно, что если дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция имеет в интервале $(a; b)$ только одну стационарную точку и экстремум в ней, то

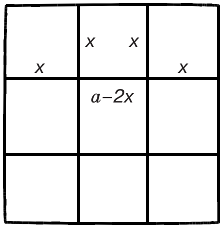


Рис. 91

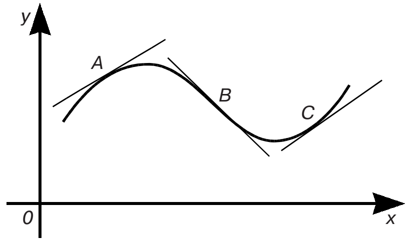


Рис. 92

в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее в случае минимума.

Задача. Из квадратного листа жести со стороной a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (рис. 91), необходимо сделать прямоугольную коробку наибольшего объема.

Решение. Обозначим сторону, вырезаемого квадрата через x. Тогда объем коробки выразится равенством $V = x(a - 2x)^2$, где x изменяется в интервале $(0; a/2)$. Производная $V' = (a - 2x)(a - 6x)$ между 0 и $a/2$ обращается в нуль в единственной точке $x = a/6$. При этом значении x объем V имеет максимум, значит, согласно замечанию, и наибольшее значение, так как при $x = (a/6)$ $V'' = -4a < 0$. Таким образом, объем коробки будет наибольшим при стороне вырезаемого квадрата $x = a/6$.

5. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

На рис. 92 построен график дифференцируемой функции $y = f(x)$. В точках A, B и C построим касательные к графику. Видно, что все точки графика, достаточно близкие к точке A и лежащие по обе стороны от нее, расположены ниже касательной. В этом случае график функции $y = f(x)$ называется *выпуклым в точке* A. Все точки графика, достаточно близкие к точке C и лежащие по обе стороны от нее, расположены выше касательной. В таком случае график функции $y = f(x)$ называется *вогнутым в точке* C.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым) в интервале* $(a; b)$, если он является выпуклым (вогнутым) в каждой своей точке с первой координатой из $(a; b)$. На рис. 92 график между точками A и B является выпуклым, а между точками B и C — вогнутым.

Касательная к графику в точке B (рис. 92) пересекает график. При этом во всех точках графика, близких к точке B и лежащих слева от нее, график является выпуклым, а во всех точках графика, лежащих справа от точки B и близких к ней, график является вогнутым. Точка графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, при переходе через которую он меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называется *точкой перегиба*. В частности, на рис. 92 точка B — точка перегиба.

Сформулируем без доказательства теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба.

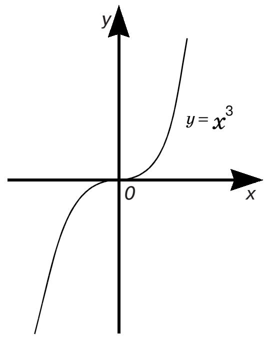


Рис. 93

Теорема 1. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в интервале $(a; b)$, то график этой функции является вогнутым (выпуклым) в этом интервале.*

Теорема 2. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ графика данной функции является точкой перегиба.*

Пример. Кривая $y = x^3$ выпукла в промежутке $(-\infty; 0)$, так как в этом промежутке $y'' = 6 < 0$, и вогнута в промежутке $(0; +\infty)$, так как в нем $y'' = 6x > 0$; при $x = 0$ $y'' = 0$, следовательно, точка $(0; 0)$ — точка перегиба (рис. 93).

6. Асимптоты. В 5.2 (п. 2) рассматривались асимптоты гиперболы. Многие другие линии также имеют асимптоты, т. е. прямые, к которым неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные (т. е. непараллельные оси ординат).

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

является бесконечным, т. е. равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример. 1. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции

$$y = \frac{1}{x}, \text{ так как } \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} - \infty.$$

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента.

Прямая

$$y = kx + b$$

называется *наклонной* (при $k = 0$ *горизонтальной*) *асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Примечание. Аналогично определяется наклонная асимптота для случая $x \to \to -\infty$.

Пример 2. Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = 1/x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

8.8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает ее график. Поэтому построение графика является заключительным этапом исследования функции, в котором используются все результаты ее исследования.

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Эта функция определена и непрерывна для всех значений x, кроме $x = 1$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Ее график не имеет точек пересечения с осью Ox, так как $x^2 + 1 > 0$ для всех вещественных x. При $x = 0$ $y = -1$.
Далее

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty,$$

т. е. прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. При $x \to +\infty$ $y \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ $y \to -\infty$. Производная данной функции $y' = (x^2 - 2x - 1)/(x - 1)^2$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Эти точки разбивают всю числовую ось на три промежутка $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$, внутри каждого из которых производная y' сохраняет постоянный знак. Очевидно, что в первом и третьем промежутках $y' > 0$ и, следовательно, здесь функция y возрастает, во втором промежутке $y' < 0$ и, следовательно, в этом промежутке данная функция убывает. Ее вторая производная $y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$ всюду отлична от нуля (значит, точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет), в промежутке $(-\infty; 1)$ $y'' < 0$ и, следовательно, здесь график данной функции является выпуклым, и в точке x_1 эта функция имеет максимум, в промежутке $(1; +\infty)$ $y'' > 0$ и, следовательно, в последнем промежутке этот график является вогнутым, и в точке x_2 данная функция имеет минимум. Наконец, поскольку

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0,$$

то график данной функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$ и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. График функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ изображен на рис. 94.

Пример 2. Построить график функции $y = e^{-x^2}$.

Эта функция определена, непрерывна, положительна на всей числовой оси и является четной. Поэтому достаточно построить ее график в первом квадранте. При $x = 0$ $y = 1$. При $x \to +\infty$ $y \to 0$, значит, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Производная $y' = -2xe^{-x^2}$ обращается в нуль только в точке $x_0 = 0$; при $x > 0$ $y' < 0$, т. е. при $x > 0$ данная функция убывает. Ее вторая производная $y'' = 2(2x^2 - 1)e^{x^2}$ в точке $x_1 = 1/\sqrt{2}$ обращается в нуль, в промежутке $(1/\sqrt{2};\ +\infty)$ $y'' > 0$, и, следовательно, здесь график данной функции является вогнутым, а в промежутке $[x_0;\ x_1]$ $y'' < 0$, и, следовательно, в нем этот же график является выпуклым, x_1 — абсцисса его точки перегиба и, наконец, в точке x_0 данная функция имеет максимум. График данной функции изображен на рис. 95. Это так называемая *кривая Гаусса* (Карл Гаусс (1777–1855) — немецкий математик).

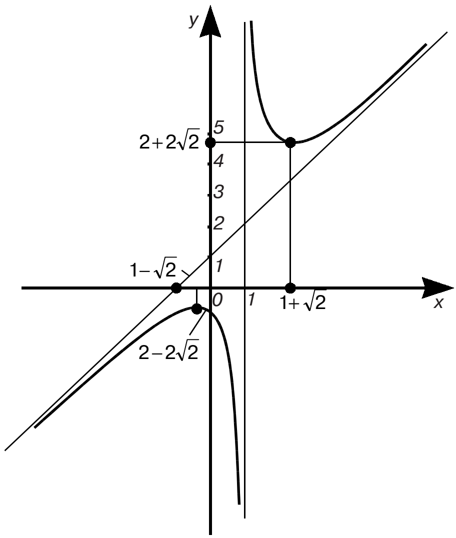


Рис. 94

Пример 3. Построить график функции $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

График этой функции изображен на рис. 96.

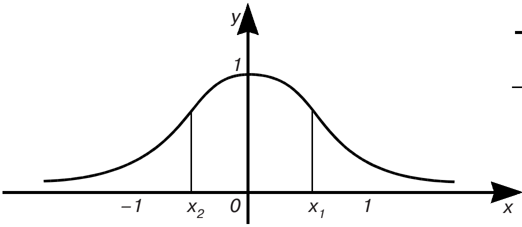


Рис. 95

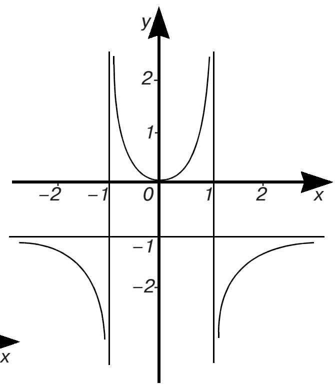


Рис. 96

8.9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема. *Пусть в интервале* $(\alpha; \beta)$ *функция* $f(x)$ *имеет производные до* $(n+1)$*-го порядка включительно. Тогда для всякого* x *из этого интервала и фиксированного* a *этого интервала имеет место формула*:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$

$$+\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (1)$$

Здесь c находится между x и a, т. е. $c = a + \Theta(x - a)$, где Θ — число, заключенное между 0 и 1, т. е. $0 < \Theta < 1$.

Формула (1) называется *формулой Тейлора* (Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик), а последнее слагаемое в правой части этой формулы — *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа*.

Доказательство формулы Тейлора, которое здесь не приводится, можно найти, например, в [12, т. 1].

2. Применение формулы Тейлора к элементарным функциям. Приближенные формулы. Частным случаем формулы Тейлора, соответствующим случаю $a = 0$, является формула:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (2)$$

где $c = \Theta x$. Эту формулу часто называют *формулой Маклорена* (Колин Маклорен (1698–1746) — шотландский математик). Здесь остаточный член

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Разложим по этой формуле некоторые элементарные функции.

1. Пусть $f(x) = e^x$, тогда $f^{(k)}(x) = e^x$ при любом натуральном k и при любом x. В частности, при $x = 0$ имеем $f(0) = 1$ и $f^{(k)}(0) = 1$. По формуле (2) получим разложение функции e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c, \qquad (3)$$

Из равенства (3) получаем приближенную формулу:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Так как остаточный член здесь

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c,$$

то, например, при $x > 0$ погрешность $r_n(x)$ оценивается так:

$$0 < r_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \qquad (4)$$

В частности, при $x = 1$ получаем приближенное значение числа e:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

При этом из (4) следует, что $0 < r_n(1) < 3/(n+1)!$, так как $e < 3$. Если требуется вычислить значение e с точностью до 0,001, то число n определяется из неравенства $3/(n + 1)! < 0{,}001$ или $(n + 1)! > 3000$. Следовательно, если взять $n = 6$, то требуемое неравенство верно.

Таким образом, используя формулу Маклорена, можно вычислить число e с любой точностью, при этом алгоритм вычисления числа e легко реализуется на ЭВМ.

2. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x$, $f^{\mathrm{V}}(x) = \cos x$, ... Следовательно, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$, $f^{\mathrm{V}}(0) = 1$, и далее такое же чередование значений.

По формуле (2) (если взять $n = 2m$) имеем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$

$$+ (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos c. \qquad (5)$$

Из разложения (5) получим приближенную формулу:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

с погрешностью $r_n(x)$, оцениваемой неравенством

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

(так как $|\cos c| \leq 1$ при любом c).

В частности, имеем приближенную формулу

$$\sin x \approx x$$

с погрешностью, по модулю не превосходящей $|x|^3/3!$.

3. Аналогично при $f(x) = \cos x$ имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos c, \qquad (6)$$

откуда получаем приближенную формулу

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

с погрешностью

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

4. Пусть $f(x) = (1 + x)^n$, где n — натуральное число. Последовательно дифференцируя $f(x)$, получим:

$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, $f''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$, ... $f^{(k)}(x) = n(n - 1) \ldots (n - k + 1)(1 + x)^{n-k}$, ... $f^{(n)}(x) = n!$ (производные порядка выше n все равны нулю).

Отсюда $f(0) = 1$, $f'(0) = n$, $f''(0) = n(n - 1)$, ..., $f^{(k)}(0) = n(n - 1) \ldots (n - k + 1)$, ..., $f^{(n)}(0) = n!$.

По формуле (2) имеем равенство:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + x^n, \qquad (7)$$

называемое *биномом Ньютона*.

Очевидно, равенство (3), (5), (6), (7) верны при всех значениях x.

Упражнения

Найти производные функции:

1. $y = 3x$. $[y' = 3.]$
2. $y = 8 - x^2$. $[y' = -2x.]$
3. $y = (4x + 1)^2$. $[y' = 8(4x + 1).]$

4. $y=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$. $\left[y'=-\dfrac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.\right]$

5. $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$. $\left[y'=\dfrac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}.\right]$

6. $y = \sin^3 x$. $[y' = 3\sin^2 x \cos x.]$

7. $y = \sin x^2$. $[y' = 2x \cos x^2.]$

8. $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$. $\left[y'=-\dfrac{\sin x}{2}.\right]$

9. $y=\cos\dfrac{x^3}{2}$. $\left[y'=-\dfrac{3}{2}x^2\sin\dfrac{x^3}{2}.\right]$

10. $y = x^2 \cos x$. $[y' = x(2 \cos x - x \sin x).]$

11. $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$. $\left[y'=\dfrac{5\cos x-\cos 5x}{2\cos^2 3x}.\right]$

12. $y = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x$. $[y' = x^2 \cos x.]$

13. $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. $\left[y'=\dfrac{1}{1-\sin x}.\right]$

14. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}x$. $\left[y'=\dfrac{6}{4+9x^2}.\right]$

15. $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x}{x+5}}$. $\left[y'=\dfrac{1}{x^2+5x}.\right]$

16. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$. $\left[y'=\dfrac{1}{4(x^2-1)}.\right]$

17. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. $\left[y'=-\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}.\right]$

18. $y=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$. $\left[y'=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}.\right]$

19. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. $\left[y'=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}.\right]$

20. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$. $\left[y'=\dfrac{2a^3}{x^4-a^4}.\right]$

21. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$. $\left[y'=\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}.\right]$

22. $y=\dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x}{2}$. $[y' = x \operatorname{arctg} x.]$

23. $y=4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$. $\left[y'=4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}\ln 4\cdot\dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.\right]$

Найти с помощью дифференциала приближенные значения для данных выражений.

24. $\sqrt{1{,}006}$. $[\sqrt{1{,}006} \approx 1{,}003.]$

25. $\sqrt[3]{9}$. $[\sqrt[3]{9} \approx 2{,}083.]$

26. $(1{,}03)^5$. $[(1{,}03)^5 \approx 1{,}15.]$

27. $e^{0{,}1}$. $[e^{0{,}1} \approx 1{,}1.]$

28. $\cos 61^\circ$ $[\cos 61^\circ \approx 0{,}4849.]$

Найти производные высших порядков следующих функций:

29. $y = x \ln x$; $y'' = ?$ $[y'' = 1/x.]$

30. $y = e^{2x}$; $y''' = ?$ $[y''' = 8e^{2x}.]$

31. $y = e^x + x^2$; $y^{\mathrm{IV}} = ?$ $[y^{\mathrm{IV}} = e^x.]$

32. $y = e^{\cos x}$; $y'' = ?$ $[y'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x).]$

33. $y = \sin 2x$; $y'' = ?$ $[y'' = -4 \sin 2x.]$

34. $y = \operatorname{arcctg} x$; $y'' = ?$ $\left[y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.\right]$

35. Тело движется прямолинейно по закону $s = t^2 + 2t + 3$(м). Определить его скорость (v) и ускорение (a) в момент времени $t = 1$ (с).

$[v = 4(\text{м/с}),\ a = 2(\text{м/с}^2).]$

36. Пусть скорость прямолинейного движения некоторой точки изменяется по закону $v = 5 + 3t + 6t^2$ (м/с). Найти ускорение в момент времени $t = 2$ (с).

$[27\ \text{м/с}^2.]$

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. $[-3.]$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

40. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. $[1.]$

41. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. $[0.]$

42. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$. $[0.]$

43. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^n \ln x \quad (n > 0)$. $[0.]$

44. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}\right)$. $\left[\dfrac{1}{6}.\right]$

45. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$. $[0.]$

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. $[1.]$

47. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. $[-3/5.]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x2)^{\frac{1}{x^2}}$. $[e^{-1/2}.]$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $[e^{-1/6}.]$

50. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$. [1.]

51. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2+1)^{\frac{1}{x}}$. [1.]

Найти интервалы возрастания и убывания следующих функций.

52. $y = 3x - x^3$ [Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и возрастает на $(-1; 1)$.]

53. $y = x^2 - 4x$. [Убывает на $(-\infty; 2)$ и возрастает на $(2; +\infty)$.]

54. $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x+1$. [Убывает на $(-1; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.]

55. $y=3x+\dfrac{3}{x}+5$. [Убывает на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.]

56. $y = 4x - 3$. [Возрастает на $(-\infty; +\infty)$.]

Исследовать на экстремум следующие функции.

57. $y = 2x^2 - 8$. [Минимум при $x = 0$.]

58. $y = 2x - x^2$. [Максимум при $x = 1$.]

59. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$. [Минимум при $x = 5$; максимум при $x = 1$.]

60. $y = x \ln x$. [Минимум при $x = 1/e$.]

61. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$. [Минимум при $x = -2$; максимум при $x = 2$.]

62. $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$. [Минимум при $x = -1$ и $x = 3$; максимум при $x = 0$.]

63. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x+7$. [Минимум при $x = -3$; максимум при $x = 2$.]

Найти наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

64. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 2]$. [-13 и 3]

65. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3$ на отрезке $[-1; 2]$ [$-\dfrac{7}{3}$ и 3.]

66. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$. [$-\dfrac{4}{3}$ и -1.]

67. $y = \operatorname{tg} x - x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$. $\left[\dfrac{\pi-4}{4}\right.$ и $\left.\dfrac{4-\pi}{4}.\right]$

68. Найти положительное число x, чтобы разность $x - x^2$ была наибольшей. [0,5.]

69. Разложить число 20 на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

[Искомые слагаемые 10 и 10]

70. Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

[$-0{,}5$.]

71. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

[Радиус полукруга должен быть равен высоте прямоугольника $R = H = \dfrac{2p}{4+\pi}$.]

Глава 9. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

9.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.

В гл. 8 было введено новое действие — дифференцирование: нахождение по заданной функции ее производной. Оказывается, что для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: отыскание функции по заданной ее производной. К этому приводят многочисленные задачи из физики и других областей науки и техники.

Ранее (см. 8.1) было установлено, что если известен закон $s = s(t)$ прямолинейного движения материальной точки, выражающий зависимость пути s от времени движения t, то скорость точки выражается производной пути по времени: $v = s'(t)$. Обратная задача: известна скорость прямолинейного движения точки $v = v(t)$ как функция времени. Найти закон движения. Ясно, что искомой функцией $s = s(t)$ будет такая, для которой $s'(t) = v(t)$.

Определение. 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для данной функции $f(x)$ (или, короче, *первообразной* данной функции $f(x)$) на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как при любом x $(x^3)' = 3x^2$. Отметим при этом, что вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной для $f(x) = 3x^2$ является любая функция $F(x) = x^3 + C$, где C — произвольное постоянное число (это следует из того, что производная постоянной равна нулю). Это свойство имеет место и в общем случае.

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — *две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то разность между ними в этом промежутке равна постоянному числу.*

Доказательство. Пусть, например, указанный промежуток — интервал $(a; b)$. Из определения первообразной имеем $F'_1(x) = f(x)$ и $F'_2(x) = f(x)$ для любого x из $(a; b)$.

Пусть $\alpha(x) = F'_2(x) - F'_1(x)$. Тогда для любого x из $(a; b)$

$$\alpha'(x) = F'_2(x) - F'_1(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

следовательно (см. следствие из 8,6, п. 3), $\alpha(x) = C$.

Из теоремы 1 следует, что если известна какая-нибудь первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$, то все множество первообразных для $f(x)$ исчерпывается функциями $F(x) + C$.

Подчеркнем важный факт: если производная для функции одна, т. е. операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Определение 2. Выражение $F(x) + C$, *где* $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ и C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, причем $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* $f(x)dx$ *— подынтегральным выражением,* x *— переменной интегрирования;* $\int$ *— знак неопределенного интеграла.* Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? В связи с этим вопросом приведем без доказательства следующую теорему (см. [6, т. I]);

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a; b]$, *то на этом сегменте у функции* $f(x)$ *существует первообразная.*

Ниже мы будем говорить о первообразных лишь для непрерывных функций. Поэтому рассматриваемые нами далее в этом параграфе интегралы существуют.

2. Свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие два свойства:

1. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$

и, значит, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C,$

что можно записать так $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Действительно, имеем:

$$(k\int f(x)dx)' = k(\int f(x)dx)' = kf(x).$$

Аналогично доказывается следующее свойство:

4. *Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:*

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \qquad (2)$$

Примечание 1. Равенства (1) и (2) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. Таблица основных интегралов. Таблица содержит формулы, легко проверяемые непосредственным дифференцированием:

I. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C(\mu \neq -1).$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

IV. $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$

V. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

VI. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$

IX. $\int \frac{x dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 + a| + C.$

X. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Проверим, например, формулу II. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = 1/x$. Следовательно, формула II справедлива как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

4. Примеры непосредственного интегрирования. Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 1. $\int(5x^4 - 3x^2 + 1)dx = 5\int x^4dx - 3\int x^2dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$

Пример 2. $\int\frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx = \int(x^4 - x^3 + x^{-2})dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$

Пример 3.

$$\int(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2dx = \int(x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}})dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

9.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Замена переменной интегрирования. Этот способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ ($f(x)$ непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда

$$f(x) = f(\varphi(t)),\ dx = \varphi'(t)dt$$

и

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 1. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ найдем подстановкой $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$ и $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$ $= 2\int e^tdt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t = \Psi(x)$.

Пример 2. $\int\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. Полагая $t = e^x$, получаем: $dt = e^xdx = tdx$, $dx = \frac{dt}{t}$ и

$$\int\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int\frac{dx}{t(t + t^{-1})} = \int\frac{dx}{t^x + 1} = \mathrm{arctg}t + C = \mathrm{arctg}e^x + C.$$

Во многих случаях нет необходимости записывать, какое выражение мы принимаем за новую переменную.

Пример 3. $\int\sqrt{x+3}dx = \int(x+3)^{\frac{1}{2}}d(x+3) = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + C.$

Пример 4. $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

Пример 5. $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x\, d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$

2. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Как известно (см. 8.3, п. 4), $d(uv) = vdu + udv$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

(произвольная постоянная интегрирования C здесь включена в слагаемое $\int vdu$). Это и есть *формула интегрирования по частям*. Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части (2) окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

Пример 1. $\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

Пример 2. $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Пример 3. $\int \underbrace{\mathrm{arctg}x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Иногда полезно повторное интегрирование по частям.

Пример 4. $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x dx}_{dv} = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx =$
$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

9.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Выделение правильной рациональной дроби. Как известно (см. 7.2, п. 2), дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется отношение двух многочленов.

Рациональная дробь называется *правильной* (*неправильной*), если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше (больше или равна) степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Например, дроби

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+12},\quad \frac{x+2}{x^2-1},\quad \frac{x^5}{x^{6-1}}\ \text{правильные,}$$

а дроби

$$\frac{x^5}{x^2+1},\quad \frac{x^3-1}{x+1},\quad \frac{x+1}{3x-1}\ \text{неправильные.}$$

Неправильную рациональную дробь всегда можно свести к правильной, разделив числитель на знаменатель «столбиком» и выделив из дроби целую часть, т. е многочлен.

Пример. $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}=(x^2-2x)+\dfrac{4x+1}{x^2-x+2}.$

Поэтому будем рассматривать задачу интегрирования правильной рациональной дроби, так как интегрирование многочлена не представляет труда.

Как будет видно ниже (см. п. 3), всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших* дробей следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,\ldots)$.

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$. IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$ $(l=2,3,\ldots)$,

где A, a, p, q, M, N — постоянные действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $(p^2/4)-q<0$.

2. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет труда. В самом деле,

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Перейдем к интегрированию простейшей дроби III типа. Подстановка $t=(1/2)(x^2+px+q)'$, т. е. $t=x+(p/2)$, и обозначение

$q - (p^2/4) = a^2$ дают $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = t^2 + a^2$, $Mx + + N = Mt + D$, где $D = N - (1/2)\, Mp$. Поэтому

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt+D}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+\alpha^2} + D\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+\alpha^2) + \frac{D}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + C,$$

где $t = x + p/2$.

Рассмотрим, наконец, интегрирование рациональных дробей IV типа. С помощью той же подстановки $t = x + p/2$ при $l > > 1$ и $p^2/4 - q < 0$ получаем:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx = \int \frac{Mt+D}{(t^2+\alpha^2)^l}dt = M\int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^l} + D\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l} =$$

$$= \frac{M}{2}\int (t^2+\alpha^2)^{-l} d(t^2+\alpha^2) + D\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}.$$

Интеграл $\int(t^2 + \alpha^2)^{-1} d(t^2 + \alpha^2)$ табличный.

Для интеграла $I_l = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^l}$ получим *рекуррентную* формулу, т. е. формулу, сводящую вычисление I_l к вычислению I_{l-1}. С этой целью рассмотрим интеграл

$$I_{l-1} = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}}$$

и применим к нему формулу интегрирования по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}}, \quad dv = dt,$$

откуда

$$du = -\frac{(l-1)2tdt}{(t^2+\alpha^2)^l}, \quad v = t.$$

Тогда

$$I_{l-1} = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{t^2dt}{(t^2+\alpha^2)^l} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{(t^2+\alpha^2)-\alpha^2}{(t^2+\alpha^2)^l}dt = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}} +$$

$$+2(l-1)I_{l-1}-2(l-1)\alpha^2 I_l.$$

Отсюда

$$2(l-1)\alpha^2 I_l=\frac{t}{(t^2+\alpha^2)^{l-1}}+(2l-3)I_{l-1}.$$

и, следовательно,

$$I_l=\frac{t}{\alpha^2(2l-2)(t^2+\alpha^2)^{l-1}}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{2l-3}{2l-2}I_{l-1}. \tag{1}$$

Формула (1) и есть рекуррентная формула. Переходя от l к $l-1$, от $l-1$ к $l-2$ и т. д., дойдем до табличного интеграла

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+\alpha^2}.$$

В результата будет известен и I_l.

3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Пусть дана правильная рациональная дробь:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{2}$$

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $P(x)/Q(x)$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов — действительные числа. Как установлено в 7.7. (п. 6), для многочлена с действительными коэффициентами имеет место соответствующее разложение на множители (см. 7.7, (8)). Пусть для определенности знаменатель $Q(x)$ разлагается на множители следующим образом:

$$Q(x)=(x-a)^k(x^2+px+q)', \tag{3}$$

где $(p^2/4)-q<0$. Имеет место следующая теорема (см., например, [6, т. 1]:

Теорема. *Для дроби* (2), *знаменатель которой имеет вид* (3), *справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}, \qquad (4)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_l, N_l$ — *постоянные действительные числа.*

Из формулы (4) видно, что линейному множителю x - a знаменателя $Q(x)$ соответствуют в разложении (4) простейшие дроби I и II типов, а квадратичному множителю $x^2 + px + q$ — простейшие дроби III и IV типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратичному), равно показателю степени, с которым этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители. Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливым ([6]. т. I) и при любом конечном числе линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q(x)$.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Одним из наиболее простых методов определения коэффициентов в разложении правильной дроби на простейшие является метод неопределенных коэффициентов. Поясним применение этого метода на примере.

Пример. Разложить на простейшие дроби правильную дробь

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Убедившись, что квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет комплексные корни, ищем согласно теореме из п. 3 разложение в виде

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}, \qquad (5)$$

где коэффициенты A, M, N необходимо определить. Для этого приводим к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части соотношения (5). Приравниваем числители исходной дроби и той, которая будет получена:

$$2x + 3 = A(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x + 1). \qquad (6)$$

Коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях тождества (6) должны быть равны. Записывая это условие последовательно для коэффициентов при x^2, x и x^0, получим:

$$\begin{cases} A+M=0, \\ A+M+N=2, \\ A+N=3. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 1$, $M = -1$, $N = 2$. Наконец, подставляя в равенство (5) найденные значения A, M, N, окончательно получим:

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2+x+1}.$$

5. Интегрирование правильных рациональных дробей. Для вычисления интеграла от правильной рациональной дроби надо эту дробь разложить на простейшие согласно теореме из п. 3 и найти интеграл от полученной суммы простейших дробей. Следовательно, интеграл от любой правильной рациональной дроби есть функция элементарная, потому что представляет сумму элементарных функций, которые получаются в результате интегрирования простейших дробей.

Пример. Найти

$$\int \frac{5x^2-14x+11}{x^2-3x^2+3x-1}dx.$$

Так как $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$, то, получив разложение дроби $\frac{5x^2-14x+11}{(x-1)^3}$ на простейшие и проинтегрировав их, получим:

$$\int \frac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}dx = \int\left(\frac{5}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right)dx =$$

$$= 5\ln|x-1| + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

9.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Интегралы с линейной иррациональностью. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то полезна подставка

$$t = \sqrt[n]{ax+b}.$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Полагаем $t = \sqrt[3]{x+1}$, отсюда

$$x = t^3 - 1,\ dx = 3t^2dt.$$

Имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3t^2dt}{t} = 3\int tdt = \frac{3}{2}t^2 + C = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

2. Интегралы с квадратичной иррациональностью.

1. Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \tag{1}$$

с помощью дополнения квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ до полного квадрата приводится в зависимости от знака A к одному из двух табличных интегралов XI, XII (см. таблицу основных интегралов).

2. Интеграл

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$$

приводится к интегралу (1) следующим путем:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{\left(Mx+\frac{MB}{2A}\right)-\frac{MB}{2A}+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx = \frac{M}{2A}\int \frac{(2Ax+B)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} +$$

$$+\left(N-\frac{MB}{2A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{M}{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C} +$$

$$+\left(N-\frac{MB}{2A}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

3. Найдем интегралы

$$\int \sqrt{x^2+b}\, dx, \tag{2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx. \tag{3}$$

Имеем:

$$\int \sqrt{x^2+b}\, dx = \int \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+b}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}. \tag{4}$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}}$ применим метод интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}}$, тогда $du = dx$, $v = \sqrt{x^2+b}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+b}} = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}\,dx.$$

Подставляя это выражение в равенство (4), получим

$$\int \sqrt{x^2+b}\;dx = x\sqrt{x^2+b} - \int \sqrt{x^2+b}\;dx + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}},$$

или

$$2\int \sqrt{x^2+b}\;dx = x\sqrt{x^2+b} + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}},$$

откуда

$$\int \sqrt{x^2+b}\;dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+b} + b\ln|x+\sqrt{x^2+b}|) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\;dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

4. Интеграл $\int \sqrt{Ax^2+Bx+C}\;dx$ в зависимости от знака A приводится к одному из интегралов вида (2), (3).

9.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Интегралы вида $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$. Эти интегралы с помощью известных тригонометрических формул (приложение 1, тригонометрия: 8) приводятся к интегралам

$$\int \cos\gamma x dx = \frac{1}{\gamma}\sin\gamma x + C, \quad \int \sin\gamma x dx = -\frac{1}{\gamma}\cos\gamma x + C.$$

Пример. Найти $\int \cos 8x \cos 6x dx$.
Так как $\cos 8x \cos 6x dx. = (1/2)(\cos 2x + \cos 14x)$, то

$$\int \cos 8x \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 14x)dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 14x}{28} + C.$$

2. Интегралы вида $I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$, где n и m — натуральные числа. Если n и m четные, то интегралы $I_{n,m}$ находятся с помощью тригонометрических формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел n и m нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель первой степени и вводится новая переменная.

Пример. Найти $\int \sin^8 x \cos^5 x dx$. Имеем:

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \int \sin^8 x (1-\sin^2 x)^2 d\sin x = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2\sin^{11} x}{11} + \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(u, v)$ — рациональная функция двух аргументов u и v. Заметим, что рациональная функция двух аргументов — это отношение двух многочленов двух переменных, а многочленом двух переменных u и v называется сумма произведений вида $a_{mn}u^m v^n$ (m, n — целые неотрицательные числа, a_{mn} — постоянные числа). Покажем, то интеграл $\int R(\sin x \cos x)dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции аргумента t подстановкой $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из подстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$ следует, что $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = 2dt/(1 + t^2)$. Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция t.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Примечание. Заканчивая методы интегрирования, заметим, что хотя для всякой непрерывной функции существует первообразная (9.1. п. 1, теорема 2), но эта первообразная не для всякой функции является элементарной функцией. Например, для функции e^{-x^2} первообразная не выражается в элементарных функциях. В этом случае говорят, что интеграл $\int e^{-x^2}dx$ не берется в элементарных функциях.

9.6. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $[t_0; T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$. Разобьем отрезок времени $[t_0; T]$ моментами времени (точками $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ на n отрезков времени (частичных отрезков) и положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ; $\lambda = \max\Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

$$s \approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n)\Delta t_n,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[t_{k-1}; t_k]$. Эта сумма (ее кратко будет обозначать $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$) будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временных отрезков $[t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время T-t_0 со скоростью $v = v(t)$, естественно принять:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k-1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k. \quad (1)$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа A силы F вычисляется по формуле

$$A = Fs.$$

Пусть теперь материальная точка движется по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $(b > a)$ под действием переменной силы, направленной по оси Ox и являющейся функцией от x:

$$F = f(x).$$

Для нахождения работы A в этом случае разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max\Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них силу F можно считать постоянной (равной $f(\tau_k)$), что дает приближенное выражение для работы

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[x_{k-1}; x_k]$. Отсюда

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$ (рис. 97), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a; b]$, и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной* трапецией. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda = \max\Delta t_k$. На каждом частичном сегменте $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, выберем произвольную точку $\tau_k (x_{k-1} \le \tau_k \le x_k)$. Произведение $f(\tau_k)\Delta x_k$ даст площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\tau_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — приближенно площадь S криволинейной трапеции $aABb$. Отсюда, как и в предыдущих задачах,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \qquad (3)$$

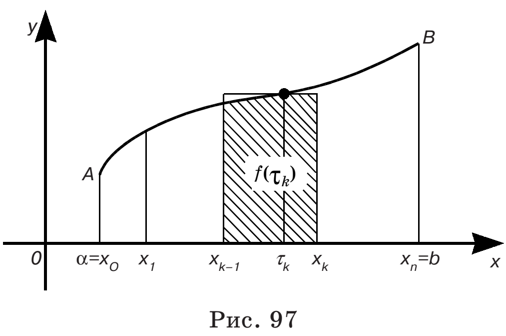


Рис. 97

2. Понятие определенного интеграла. Из решения приведенных трех задач мы видим, что хотя они имеют различный смысл, но математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах мы получаем выражение одного и того же вида.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{4}$$

Если существует предел (4), не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек τ_k, то этот предел будем называть *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначать символом

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$. При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ — *подынтегральным* выражением, числа a и b — *пределами интегрирования* (a — *нижний предел*, b — *верхний предел*), а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — *интегральной суммой*.

Очевидно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она на нем ограничена.

Справедлива следующая теорема (она доказывается в более полных курсах математического анализа — см., например, [8]):

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

В условиях рассмотренных выше задач, приведших к понятию определенного интеграла, выражения вида (1) — (3) (пределы сумм) являются определенными интегралами. Рассмотрим это подробнее.

1. Путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$), есть $\int\limits_{t_0}^{\tau} v(t)dt$.

2. Если переменная сила $F = f(x)$ действует в направлении оси Ox ($f(x)$ непрерывна на $[a; b]$), то работа этой силы на отрезке $[a; b]$ оси Ox равна

$$\int_a^b f(x)dt.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука

$$F = kx,$$

где F — сила (Н), x — величина растяжения или сжатия (м), вызванного силой F, а k — коэффициент пропорциональности.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой *площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$.*

9.7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Свойство определенного интеграла. Ниже рассматриваем функции, непрерывные на отрезке $[a; b]$. По определению полагают, что определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Действительно, по определению определенного интеграла как предела интегральной суммы имеем:

$$\int\limits_a^b Af(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Af(\tau_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} A\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k =$$

$$= A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k = A\int\limits_a^b f(x)x.$$

Аналогично устанавливается свойство:

2. *Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций*:

$$\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, здесь соответствующие интегральные суммы различаются по знаку, ибо в одной из них все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ положительны, а в другой аналогичные разности все отрицательны.

4. *Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{где } a < c < b.$$

Это свойство вытекает из определения определенного интеграла.

5. *Если функция* $f(x) > 0$ *на отрезке* $[a; b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Последнее свойство непосредственно следует из геометрического смысла определенного интеграла.

2. Формула Ньютона — Лейбница.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a; b]$ *и* $F(x)$ — *первообразная функции* $f(x)$ *на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница*. (Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчислений). Эта формула дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a; b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В силу формулы Лагранжа (8.6. п. 3) и формулы $F'(x) = f(x)$, имеем:

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\Delta x_1,\ a < c_1 < x_1,$$
$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2,\ x_1 < c_2 < x_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n,\ x_{n-1} < c_n < b.$$

Суммируя эти равенства, получим:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Поэтому, переходя в равенстве (2) к пределу при $\lambda \to 0$, получим искомую формулу (1).

Примечание. Для краткости записи употребляется обозначение $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ или $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$. Поэтому формула Ньютона — Лейбница принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b.$$

Заметим, что в формуле (1) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, так как

$$\left[F(x) + C\right]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Пример 1. $\int_0^1 2x dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$

Пример 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Пример 3. $\int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx = 3\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 x^2 dx - 5\int_1^2 dx = \frac{3}{5}x^5\Big|_1^2 + \frac{2}{3}x^3\Big|_1^2 - 5x\Big|_1^2 =$

$= \frac{3}{5}(2^5 - 1) + \frac{2}{3}(2^3 - 1) - 5(2 - 1) = \frac{274}{15}.$

Задача. Определить работу A, необходимую для запуска ракеты массой m_p с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h (рис. 98).

Решение. Обозначим через F величину силы притяжения ракеты Землей. Пусть $m_з$ — масса Земли, Согласно закону Ньютона,

$$F = k\frac{m_p m_з}{x^2},$$

где x — расстояние от ракеты до центра Земли. Полагая $km_p m_з = \gamma$, получим $F(x) = \gamma/x^2$, $R \le x \le h + R$, R — радиус Земли. При $x = R$ сила $F(R) = \gamma/R^2$ равна весу P ракеты, поэтому $\gamma = PR^2$ и $F(x) = PR^2/x^2$. Значит (9.6, п. 2),

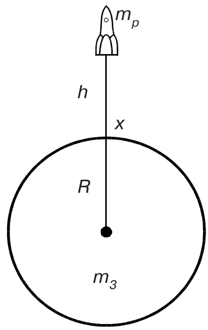


Рис. 98

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \frac{1}{x}\Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)dt,$$

где x — любая точка из $[a; b]$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то согласно формуле Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) = f(x).$$

Таким образом, *производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела*.

4. Теорема о среднем.

Теорема. Если функция $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a; b]$, *то в интервале* $(a; b)$ *найдется такая точка* c, *что*

$$\int_a^b f(x)dt = (b - a)f(c). \tag{3}$$

Доказательство. По формуле Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Но в силу формулы Лагранжа (8.6, п. 3)

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c) = (b - a)f(c),\ a < c < b,$$

что и приводит к искомой формуле (3).

Формула (3) при $f(x) \geq 0$ имеет простое геометрическое истолкование. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 99).

5. Замена переменной в определенном интеграле. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, функция $x = \varphi(t)$ имеет на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, при этом $a \leq \varphi(t) \leq b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$, и в силу формулы производной сложной функции (см. 8.2,п. 1)

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Теперь воспользуемся дважды формулой Ньютона — Лейбница:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Тем самым доказана формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

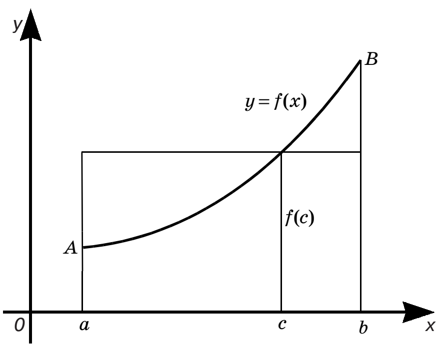


Рис. 99

Пример. Подстановка $x = \sin t$ дает

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на сегменте $[a; b]$ функции. Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, имеем:

$$\left[u(x)v(x)\right]_a^b = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Так как $v'(x)dx = dv$ и $u'(x)dx = du$, то эту формулу записывают еще в следующем, более компактном виде:

$$\int_a^b u\,dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{4}$$

При этом следует иметь в виду, что пределы интегрирования в формуле (4) относятся к независимой переменной x.

Пример: $\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$

9.8. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть речь идет о вычислении интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[a; b]$. Формула Ньютона — Лейбница не всегда позволяет вычислить интеграл

(1), так как далеко не всегда мы знаем первообразную для подынтегральной функции. Здесь на помощь приходит приближенное вычисление определенных интегралов. Кстати, на практике часто и не требуется знать точное значение данного интеграла. Рассмотрим три способа приближенного вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников, метод трапеций и метод параболических трапеций, или метод Симпсона (Томас Симпсон (1710–1761) — английский математик).

Если $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a; b]$, то, как известно (см. 9.6), интеграл (1) представляет собой площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, с боков отрезками прямых $x = a$, $x = b$. Составим интегральную сумму, соответствующую делению сегмента $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ и выбору точек $\tau_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$. Но $\Delta x_k = (b - a)/n$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Сумма $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$ есть площадь ступенчатой фигуры, изображенной на рис. 100. Поэтому площадь указанной криволинейной трапеции приближенно равна площади этой ступенчатой фигуры, т. е.

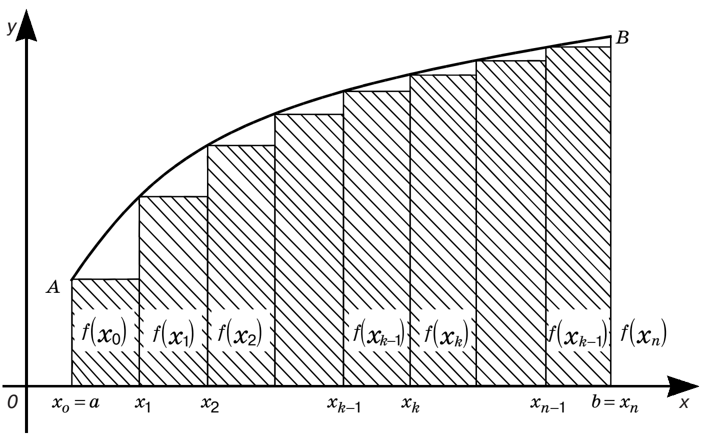


Рис. 100

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}). \qquad (2)$$

Если $\tau_k = x_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то аналогично получим приближенную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) называются *формулами прямоугольников.*

Если функция $f(x)$ возрастает на $[a; b]$, то формула (2) дает значение интеграла (1) по недостатку, а формула (3) — по избытку. Поэтому для повышения точности естественно взять среднее арифметическое этих формул:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right). \qquad (4)$$

Эту формулу называют *формулой трапеций*, так как ее геометрический смысл связан с заменой площади каждой прямоугольной полоски, на которые разбивается криволинейная трапеция, на площадь прямолинейной трапеции.

Пример. Вычислим значение интеграла

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx: \qquad (5)$$

а) по формулам прямоугольников (2) и (3) при $n = 10$ и $n = 20$; б) по формуле трапеций при $n = 10$ и $n = 20$.

При рассмотрении этого примера будем использовать, например, микрокалькулятор «Электроника Б3-36».

Вычислим сначала приближенное значение интеграла (5) по формуле прямоугольников (2) при $n = 10$. В этом случае $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1{,}2$, $x_7 = 1{,}4$, $x_8 = 1{,}6$, $x_9 = 1{,}8$ и поэтому

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{2-0}{10}\left(e^{-0^2} + e^{-0{,}2^2} + \ldots + e^{-1{,}8^2}\right).$$

Значение подынтегральной функции в точке x вычисляется по программе $x \times = /$—/ Fe^x. Следовательно, программа вычисления интеграла имеет вид:

0 × = /—/ Fe^xFП$^+$.

0,2 × = /—/ Fe^xFП$^+$.

....

1,8 × = /—/ Fe^xFП$^+$.

2 + 10 × F ИП =

Ответ: 0,98.

Вычисление по формуле (3) при $n = 10$ производится по аналогичной программе с той лишь разницей, что начальным значением аргумента является 0,2 а конечным значением число 2. Получаем ответ: 0,78. Среднее арифметическое этих ответов 0,88 дает приближенное значение интеграла по формуле трапеций.

Аналогично производятся подсчеты при $n = 20$. Ответ по формуле трапеций 0,882.

Метод Симпсона дает более точную приближенную формулу вычисления интеграла (1).

Предположим сначала, что пределы интегрирования имеют вид $a = -h, b = h$, т. е. расположены симметрично относительно точки O. Если h мало, то кривую $y = f(x)$ приближенно можно заменить параболой

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv F(x), \qquad (6)$$

проходящей через точки $A(-h); f(-h))$, $B(0; f(0))$ и $C(h; f(h))$ (рис. 101).

Тогда

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx$$

приближенно будет равен

$$\int_{-h}^{h} F(x)dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right]_{h}^{-h} = \frac{2}{3}\alpha h^3 + 2\gamma h = \frac{2}{3}h(\alpha h^2 + 3\gamma).$$

Полагая в выражении (6) последовательно $x = -h$, 0, h, получаем:

$$F(-h) = \alpha h^2 - \beta h + \gamma,\ F(0) = \gamma,\ F(h) = \alpha h^2 + \beta h + \gamma.$$

Отсюда

$$F(-h) + 4F(0) + F(h) = 2\,(\alpha h^2 + 3\gamma).$$

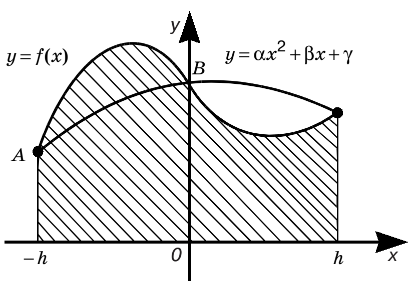


Рис. 101

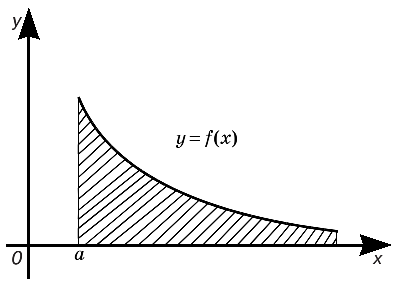


Рис. 102

Поэтому

$$\int_{-h}^{h} F(x)dx = \frac{h}{3}(F(-h) + 4F(0) + F(h)).$$

Но

$$F(-h) = f(-h),\ F(0) = f(0),\ F(h) = f(h).$$

И значит,

$$\int_{-h}^{h} F(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(-h) + 4f(0) + f(h))$$

(формула Симпсона).

Случай общего расположения пределов интегрирования сводится к рассмотренному, если перенести начало координат в точку $x = (a + b)/2$ оси абсцисс. Тогда будем иметь:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \quad (7)$$

Для увеличения точности вычисления интеграла (1) разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ на $2n$ равных частей ($f(x_k) = y_k$). Применяя к отрезку $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) формулу (7), получим:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Отсюда с использованием свойства 4 (см. 9.7, п. 1) получим:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) = \frac{b-a}{6n}((y_0 + y_{2n}) +$$

$$+4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})). \quad (8)$$

Заметим, что все четыре формулы (2), (3), (4), (8) тем точнее, чем больше n.

Наконец, отметим, что каждый из изложенных методов содержит четкий алгоритм их нахождения. Это позволяет широко применять эти методы для вычислений на ЭВМ.

9.9. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СХОДИМОСТЬ

При введении понятия определенного интеграла мы исходили из условий ограниченности подынтегральной функции и конечности пределов интегрирования. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*.

1. Интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < \infty$, т. е. для $x \ge a$. Тогда по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

сходится, а если этот предел не существует, то интеграл (2) называется *расходящимся*. Такому интегралу не приписывают никакого значения.

Геометрически для неотрицательной при $x \ge a$ функции $f(x)$ несобственный интеграл (2) по аналогии с собственным интегралом (9.6, п. 2) представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева отрезком прямой $x = a$, снизу осью Ox (рис. 102).

Пример 1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b}) = 1.$

Заданный несобственный интеграл сходится.

Пример 2. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$

Следовательно, данный интеграл расходится

Пример 3. $\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin b.$

Последний предел не существует, т. е. несобственный интеграл расходится.

Пример 4. Установить, при каких значениях α сходится интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$. Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 2. При $\alpha \ne 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \alpha<1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha>1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$и расходится при $\alpha \le 1$.

На несобственные интегралы вида (2) непосредственно распространяются многие свойства собственных интегралов.

Пусть $F(x)$ первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$ сходящегося интеграла (2). На основании формулы (1) и формулы Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x) = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)).$$

Если ввести условное обозначение

$$F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b),$$

то получим для сходящегося несобственного интеграла (2) обобщенную формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

которую записывают также в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^{+\infty}.$$

Заметим еще, что для вычисления сходящихся интегралов вида (2) сохраняются методы подстановки и интегрирования по частям.

Самым простым признаком сходимости несобственных интегралов вида (2) является признак сравнения. Рассмотрим его для случая неотрицательной подынтегральной функции.

Теорема сравнения. Если в *промежутке* $(a; +\infty)$ функции $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам* $0 \le g(x) \le$ $\le f(x)$, *то из сходимости интеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{3}$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx. \tag{4}$$

Этот признак вытекает из геометрического смысла интеграла (2).

Из этого признака следует, что при том же условии из расходимости интеграла (4) следует расходимость интеграла (3).

Пример 5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ сходится, так как при $x \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ сходится (см. пример 4).

Пример 6. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}}dx$ расходится, так как при $x \geq 1$ $\frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ расходятся (см. пример 4).

9.10. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$. Известно (см. 9.6), что если $f(x) \geq$ ≥ 0 на $[a; b]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна интегралу

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

(О понятии площади произвольной плоской фигуры, а также объеме тела и площади поверхности см., например, в [6].)
Если же $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то $-f(x) \geq 0$ на $[a; b]$. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции выразится формулой

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx, \quad \text{или} \quad S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|. \tag{2}$$

Если, наконец, линия $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то сегмент $[a; b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул (1) или (2), которая ей соответствует.

Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x =1$, $x = 3$ и осью Ox (рис. 103).

Пользуясь формулой (1), находим искомую площадь:

$$S = \int\limits_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^2\Big|_1^3 = \frac{1}{3}(27-1) = 8\frac{2}{3}.$$

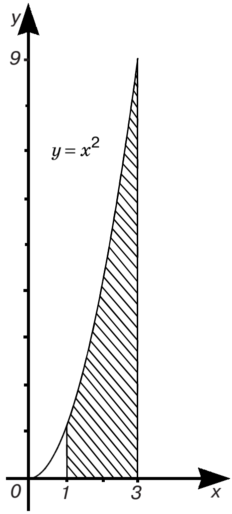


Рис. 103

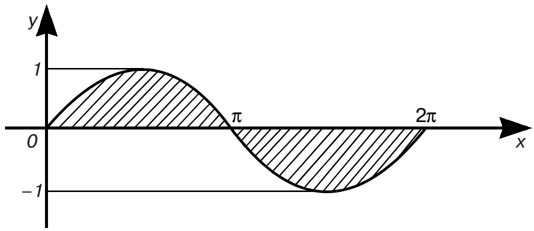


Рис. 104

Пример 2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 104). Разбиваем сегмент $[0;\ 2\pi]$ на два сегмента $[0;\ \pi]$ и $[\pi;\ 2\pi]$. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором $\sin x \le 0$. Следовательно, используя формулы (1) и (2), имеем, что искомая площадь

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = 4.$$

2. Вычисление площади в полярных координатах. Пусть требуется определить площадь сектора OAB (рис. 105), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — функция, непрерывная на отрезке $[\alpha;\ \beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha;\ \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots$ $\ldots < \varphi_k < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ и положим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda = \max\Delta\varphi_k$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Заменим k-й элементарный сектор круговым сектором радиуса $r(\xi_k)$,

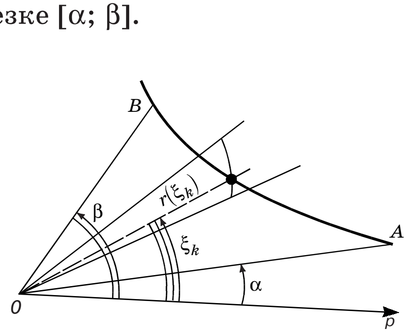


Рис. 105

где $\xi_k \in [\varphi_{k-1}; \varphi_k]$. Тогда сумма $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k$ — это приближенно площадь сектора OAB. Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \tag{3}$$

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидной $r = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 106). Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, по формуле (3) получаем

$$S = a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = \alpha^2\varphi|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\varphi|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin2\varphi|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

3. Вычисление длины дуги. Пусть дуга AB (рис. 107) задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Найдем длину дуги AB. Впишем в дугу AB ломаную линию $M_0M_1 \ldots M_n$ (рис. 107). Пусть абсциссы точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ (ординаты этих точек обозначим соответственно через $y_0, y_1, \ldots, y_n$). Имеем разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Длина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Пусть $\lambda = \max\Delta x_k$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$.

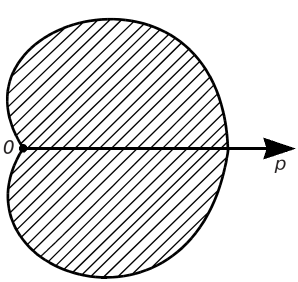


Рис. 106

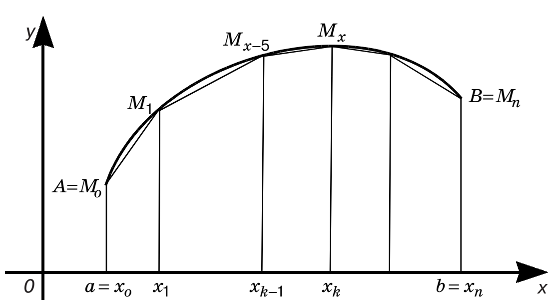


Рис. 107

По теореме Пифагора $M_{k-1}M_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Но в силу формулы Лагранжа (8.6,п. 3) $\Delta y_k = f'(\xi_k)\,\Delta x_k$, где ξ_k — некоторая промежуточная точка отрезка $[x_{k-1};\, x_k]$. Отсюда

$M_{k-1}M_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$, и, следовательно, длина ломаной линии $M_0M_1 \ldots M_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx,$$

или

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}dx \tag{4}$$

(l — длина дуги AB).
Отсюда длина дуги AM, где $M(x;\, y)$ — переменная точка дуги AB,

$$l = l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2}dx.$$

Поэтому (см. 9.7, п. 3)

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

откуда получаем формулу дифференциала дуги

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx, \tag{5}$$

или

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t)\ (\alpha \le t \le \beta), \tag{6}$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ в $[\alpha;\, \beta]$, то путем замены переменной $x = x(t)$ в (4) получим

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}dt. \tag{7}$$

Формула дифференциала дуги вместо (5) будет $l=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

Если же кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r=r(\varphi)\ \ (\alpha\le\varphi\le\beta), \tag{8}$$

то, учитывая связь между прямоугольными и полярными координатами (см. 1.1, п. 2), параметрические уравнения этой кривой будут

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\ (\alpha\le\varphi\le\beta).$$

Поэтому

$$x'=r'\cos\varphi-r\sin\varphi,\ y'=r'\sin\varphi+r\cos\varphi$$

и по формуле (7) получим

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Формула дифференциала дуги будет $dl=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$.

Пример 1. Найти длину дуги линии

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad 0\le x\le 1\ \text{(рис. 108).}$$

Имеем $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ и по формуле (4) находим

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(e^x+e^{-x})dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

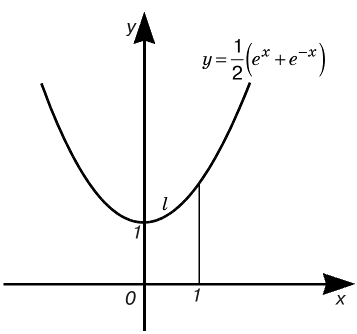


Рис. 108

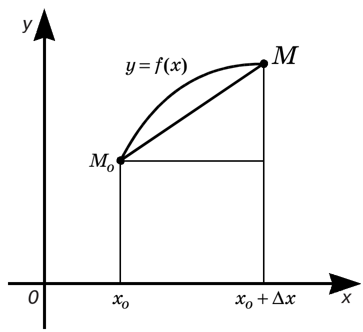


Рис. 109

Пример 2. Вычислить длину окружности радиуса R. Запишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = R$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$ — и по формуле (9) получим:

$$l = \int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi R.$$

Примечание. Если задана пространственная кривая параметрическими уравнениями (см. 4.2)

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (\alpha \le t \le \beta),$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют непрерывные производные, то ее длина (длина дуги для пространственной кривой определяется так же, как и для плоской) вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

являющейся обобщением формулы (7). При этом длина дуги, отвечающая произвольному значению параметра t из [a; b], выразится формулой

$$l = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

откуда дифференциал дуги есть

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Укажем еще на одно применение формулы (4).

Теорема. *Пусть дуга M_0M* (рис. 109) *задана уравнением $y = f(x)$ $(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x)$, причем $f(x)$ и $f'(x)$ — непрерывные функции. Тогда предел отношения длины этой дуги к длине стягивающей ее хорды при стремлении длины хорды к нулю равен единице.*

Доказательство. Имеем:

$$M_0M = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x,$$

$l = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ (l — длина дуги M_0M), или в силу теоремы о среднем (см. 9.7, п. 4) $l = \sqrt{1 + f'^2(c)} \cdot \Delta x$, где $x_0 < c < x_0 + \Delta x$. Отсюда, замечая, что если $\Delta x \to 0$, то $c \to x_0$, получим:

$$\lim_{M_0M \to 0} \frac{l}{MM_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 + f'^2(c)} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x} = \frac{\sqrt{1 + f'^2(x_0)}}{\sqrt{1 + f'^2(x_0)}} = 1.$$

Следствие. $\lim\limits_{l \to 0} \dfrac{MM_0}{l} = 1.$

4. Площадь поверхности вращения. Переходя к площади поверхности вращения, предположим, что, как и в п. 3, дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x)$ — функция, имеющая на $[a; b]$ непрерывную производную. Поверхность, образованная вращением k-го звена ломаной $M_0 M_1 \dots M_n$ вокруг оси Ox, есть боковая поверхность усеченного конуса с площадью

$$\pi(y_{k-1} + y_k) \cdot M_{k-1}M_k,$$

или

$$2\pi f(\eta_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k,$$

где

$$f(\eta_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

Следовательно, площадь поверхности вращения ломаной $M_0 M_1 \dots M_n$ вокруг оси Ox равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\eta_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k. \qquad (10)$$

Площадь S поверхности вращения дуги AB вокруг оси Ox определим как $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$ $(\lambda = \max\Delta x_k)$. Заметим при этом, что сумма (10) не является интегральной суммой для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, так как в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{k-1}; x_k]$, значения функций $f(x)$ и $[f'(x)]^2$ взяты в разных точках этого отрезка. Но можно доказать (см. например, в [5]), что предел суммы (10) равняется пределу интегральной суммы для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, т. е

$$\lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Поэтому

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (11)$$

Если данная кривая AB задана параметрическими уравнениями (6) или уравнением (8) в полярных координатах, то соответственно получим:

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

Пример. Найти площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, соответствующей изменению x от a до b ($-R \le a < 0$, $0 < b \le R$). Здесь $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -x/y$, $1 + y'^2 = R^2/y^2$ и по формуле (11) $S = 2\pi R\int_a^b dx = 2\pi R(b - a)$. В частности, при $a = -R$, $b = R$ получаем площадь сферы $S = 4\pi R^2$.

5. Вычисление объема. Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 110). Пусть для каждого x из сегмента $[a; b]$ дана площадь сечения этого тела $Q(x)$, перпендикулярного оси Ox. Найдем объем V данного тела при условии непрерывности $Q(x)$ в $[a; b]$. Разделим сегмент $[a; b]$ на n частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости разобьют B на слои. Выделим k-й слой, ограниченный плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Объем этого слоя приближенно равен $Q\,(x_{k-1})\,\Delta x_k$. Образуем сумму:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Q(x_{k-1})\Delta x_k.$$

Объем V тела B определим как $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_n$. ($\lambda = \max\Delta x_k$). Этот предел существует в силу непрерывности $Q(x)$ на $[a; b]$ и равен $\int_a^b Q(x)dx$. Итак,

$$V = \int_a^b Q(x)dx.$$

В частности, если тело ограничено поверхностью вращения линии $y = f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $Q(x) = \text{р}f^{\,2}(x)$ и $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$, или, более кратко,

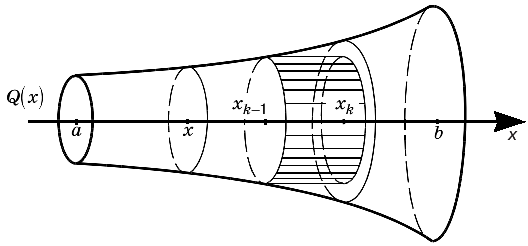


Рис. 110

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (12)$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x = 1$, вокруг оси Ox. Это тело называется *сегментом параболоида вращения* (рис. 111). Согласно формуле (12) имеем:

$$V = \pi\int_a^b x dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

9.11. ФИЗИЧЕСКИЕ И ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Центр тяжести.

Статическим моментом материальной точки, находящейся в плоскости xOy, относительно координатной оси Ox (или Oy) называется произведение массы этой точки на ее ординату (соответственно абсциссу). Статическим моментом системы таких точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно координатной оси называется сумма статических моментов всех точек системы относительно этой оси.

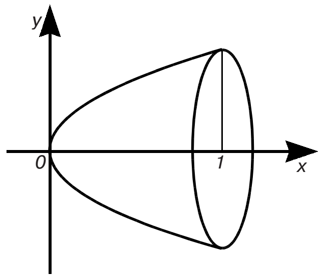


Рис. 111

Центром тяжести системы материальных точек с массами m_1, m_2, …, m_n называется точка C, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, то ее статический момент по отношению к любой оси равен статическому моменту системы точек относительно той же оси. Поэтому если обозначить через $M_x^{(n)}$ и $M_y^{(n)}$ статические моменты системы точек относительно координатных осей Ox и Oy, то координаты x_c и y_c центра тяжести С удовлетворяют соотношениям

$$mx_c = M_y^{(n)} = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n,$$
$$my_c = M_x^{(n)} = m_1y_1 + \ldots + m_ny_n,$$

где x_k, y_k — декартовы координаты точки массой m_k. Следовательно, центр тяжести данной системы материальных точек имеет координаты:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{m}.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести дуги плоской линии можно выразить через определенные интегралы. Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, где $f(x)$ — функция, имеющая на $[a; b]$ непрерывную производную, и на этой же дуге распределено вещество с плотностью $\rho = \rho(x)$. Разделим дугу AB на n частичных дуг $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Сосредоточим массу каждого из элементов $M_{k-1}M_k$ в одной его точке $N_k(x_k; y_л)$. Тогда получим приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k \approx \rho(x_k)M_{k-1}M_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $(\Delta M_x)_k \approx y_k\Delta m_k$,$(\Delta m_y)_k \approx$ $\approx x_k\Delta m_k$. Суммируя и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, $\lambda = \max\Delta x_k$, получим выражение массы материальной дуги

$$m = \int\limits_a^b \rho\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

и ее статических моментов относительно координатных осей

$$M_x = \int\limits_a^b y\rho\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \quad M_y = \int\limits_a^b x\rho\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Для нахождения центра тяжести $C(x_c; y_c)$ материальной дуги AB в соответствии с определением этого понятия составим равенства

$$mx_c = M_y \quad \text{и} \quad my_c = M_x,$$

из которых следует, что

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}. \tag{1}$$

Из формул (1) при $\rho(x) = \text{const}$ следует $\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = y_C l.$

Умножив обе части последнего равенства на 2π, получим

$$2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi y_C l.$$

или

$$S = l \cdot 2\pi y_C, \tag{2}$$

где S — площадь поверхности, образуемой вращением дуги AB вокруг оси Ox. В правой части (2) $2\pi y_C$ — длина окружности, описываемой точкой $C(x_C;\ y_C)$ при вращении вокруг оси Ox.

Это приводит к следующей теореме.

Первая теорема Гульдина (Пауль Гульдин (1577–1643) — швейцарский математик). *Площадь поверхности, образуемой вращением дуги плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна произведению длины вращающейся дуги на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести дуги.*

Пример 1. Найти центр тяжести массы, распространенной вдоль полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ при условии $\rho = 1$. Из соображений симметрии заключаем, что $x_C = 0$. Далее, согласно формуле (2) $4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi y_C$, откуда $y_C = 2R/\pi \approx 0{,}637R$ (здесь можно использовать калькулятор).

Остановимся еще на статических моментах и координатах центра тяжести плоской фигуры. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ ($f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$), $y = 0$, и на ней распределено вещество с плотностью $\rho = 1$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ на n частичных отрезков, а криволинейную трапецию на n соответствующих частей. Заменим каждую частичную трапецию прямоугольником с основанием Δx_k и высотой $y_{k-1} = f(x_{k-1})$. Тогда получим приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k \approx y_{k-1}\Delta x_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $(\Delta M_x)_k \approx$ $\approx (1/2)\, y_{k-1}\Delta m_k$, $(\Delta M_y)_k \approx x_{k-1}\Delta m_k$. Отсюда, суммируя и переходя к пределу $\lambda \to 0$, получим выражения массы и статических моментов всей фигуры:

$$m = \int\limits_a^b y\,dx, \quad M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int\limits_a^b xy\,dx. \tag{3}$$

Координаты центра тяжести x_c и y_c определяются так же, как и для материальной дуги, формулами (1), в которых m, M_x, M_y определяются по формулам (3).

Из равенства $y_c = M_x/m$, согласно формуле, (3) имеем:

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx = y_C \int_a^b y dx,$$

откуда

$$\pi\int_a^b y^2 dx = 2\pi y_C \int_a^b y dx.$$

Левая часть последнего равенства есть объем V тела, получаемого от вращения данной плоской фигуры около оси Ox, правая — произведение площади S вращающейся фигуры на $2\pi y_c$ — длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести фигуры. Итак,

$$V = S \cdot 2\pi y_C. \tag{4}$$

Это приводит ко второй теореме Гульдина.

Вторая теорема Гульдина. *Объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в ее плоскости, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести этой фигуры.*

Пример 2. Найти центр тяжести полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (при условии $\rho = 1$). Из соображений симметрии следует, что $x_C = 0$. Далее, согласно формуле (4) $(4/3)\pi R^3 = (1/2)\pi R^2 2\, \pi y_C$, откуда

$$y_C = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R$$

(здесь также для вычислений можно использовать калькулятор).

2. Средняя длина пролета. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиуса R (рис. 112). Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l.

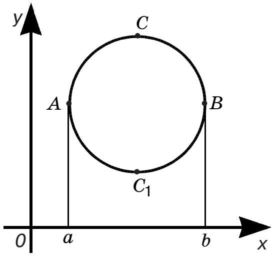


Рис. 112

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Oy (см. рис. 112). Тогда средняя длина пролета — это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B. Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ — уравнение верхней дуги, а $y = f_2(x)$ — уравнение нижней дуги, т. е.

$$l = \frac{\int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx}{b-a}$$

или

$$l = \frac{\int\limits_a^b f_1(x)dx - \int\limits_a^b f_2(x)dx}{b-a}. \quad (5)$$

Так как

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции $aACBb$ (см. 2.6), а

$$\int\limits_a^b f_2(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb, то их разность равна площади круга, т. е. πR^2. Разность $b - a$ равна, очевидно, $2R$. Подставив это в (5), получим:

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}R.$$

9.12. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1. Векторная функция скалярного аргумента, ее годограф. До сих пор мы изучали функциональную зависимость между величинами, принимающими только числовые значения. Другими словами, если переменная величина x есть функция переменной величины t, т. е. $x = x(t)$, то как значения независимой переменной t, так и значения самой функции x суть числа. Таким образом, t и x являются в этом случае *скалярными величинами*, или просто *скалярами*; иными словами, мы имеем *скалярную* функцию *скалярного* аргумента. По аналогии со скалярной функцией можно ввести понятие векторной функции скалярного аргумента.

Определение. Если каждому значению параметра t из некоторого промежутка отвечает определенный вектор $\bar{r}$ (зависящий от t), то вектор $\bar{r}$ называется *векторной функцией* (кратко — *вектор-функция*) от *скалярного аргумента* t и в этом случае пишут:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

При изменении аргумента t вектор $\bar{r}(t)$ изменяется, вообще говоря, как по величине, так и по направлению. В дальнейшем предполагается, что t изменяется в промежутке, конечном или бесконечном.

Как и в векторной алгебре (гл. 2), мы здесь рассматриваем свободные векторы, т.е. такие векторы, которые считаются равными, если они равны по величине и одинаково направлены или, иначе говоря, если они имеют равные проекции на оси координат. Свободные векторы могут быть отложены от какой угодно точки. Будем считать, что вектор $\bar{r}(t)$ исходит из начала координат, т. е вектор $\bar{r}$ — радиус-вектор некоторой точки M. В этом случае при изменении параметра t конец вектора $\bar{r}(t)$ опишет некоторую линию L, называемую *годографом* векторной функции $\bar{r}(t)$ (рис. 113). При этом начало координат называют *полюсом* годографа. Уравнение (1) называют *векторным уравнением* этой кривой.

Если у вектора $\bar{r}(t)$ меняется только *модуль*, то годографом его будет луч, исходящий из полюса. Если модуль вектора $\bar{r}(t)$ постоянен ($|\bar{r}(t)| =$ const) и меняется только его *направление*, то годограф есть линия, лежащая на сфере с центром в полюсе и радиусом, равным модулю вектора $\bar{r}(t)$.

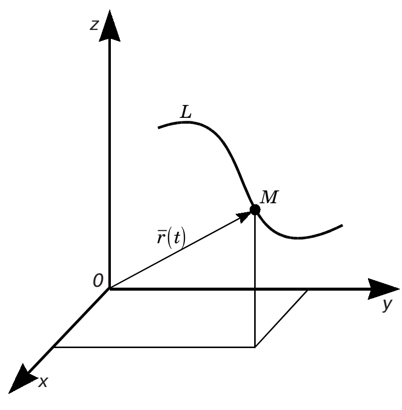


Рис. 113

С векторной функцией скалярного аргумента особенно часто приходится встречаться в кинематике при изучении движения точки, когда радиус-вектор $\bar{r}(t)$ движущейся точки является функцией времени t. Годографом такой функции является *траектория* движения точки. При этом уравнение $\bar{r} = \bar{r}(t)$ называют *уравнением движения*.

Если через x, y и z обозначить проекции вектора $\bar{r}(t)$ на оси прямоугольной системы координат в пространстве, то эти величины для каждого значения параметра t в свою очередь принимают определенные числовые значения и потому являются скалярными функциями скалярного аргумента t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad x = z(t). \tag{2}$$

В силу известного (2.1, п 8) разложения вектора по ортам прямоугольной системы координат имеем:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}.$$

Таким образом, задание векторной функции скалярного аргумента (т. е. функции (1)) равносильно заданию трех скалярных функций того же аргумента (т. е. функций (2)).

Так как уравнение (1) является уравнением некоторой кривой в пространстве, то ту же кривую задают и уравнения (2). Уравнения (2) — *обычные параметрические уравнения кривой в пространстве* (4.2, п. 1). С помощью этих уравнений для каждого значения t определяются координаты x, y, и z соответствующей точки кривой, а по координатам можно определить и радиус-вектор этой точки.

Рассмотрим кривую, заданную параметрически с помощью уравнений:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

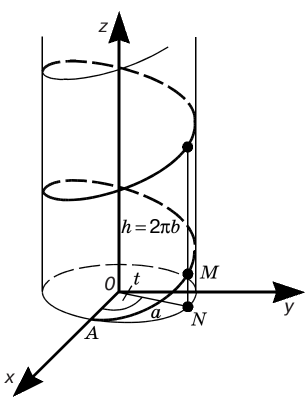


Рис. 114

Эта кривая называется *винтовой линией* (рис. 114). Ее векторное уравнение

$$\bar{r} = a\cos t \cdot \bar{i} + a\sin t \cdot \bar{j} + bt\bar{k}.$$

При любом значении параметра t

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Это означает, что винтовая линия расположена на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$. Отсюда следует, что, когда точка M движется по винтовой линии, ее проекция N на плоскости xOy перемещается по окружности с радиусом a и центром в начале координат, причем t является полярным углом точки N. Когда точка N описывает полную окружность, аппликата z точки M винтовой линии увеличивается на $h = 2\pi b$. Эта величина называется *шагом* винтовой линии.

2. Предел, непрерывность и производная вектор-функция. Пусть функция $\bar{r}(t)$ определена в окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0.

Вектор $\bar{r}_0$ называется *пределом векторной функции* $\bar{r}(t)$ при стремлении t к t_0 (или, короче, в точке t_0), если

$$\lim_{t\to t_0}|\bar{r}(t)-\bar{r}_0|=0. \tag{3}$$

Если $\bar{r}_0$ есть предел функции $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$, то это записывается так:

$$\lim_{t\to t_0}\bar{r}(t)=\bar{r}_0. \tag{4}$$

Итак, когда мы пишем соотношение (4), то подразумеваем под этим соотношение (3).

Если мы запишем векторную функцию $\bar{r}(t)$ и вектор $\bar{r}_0$ в проекциях (п. 1)

$$\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k},$$

$$\bar{r}_0=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}+z_0\bar{k},$$

то получим

$$|\bar{r}(t)-\bar{r}_0|=\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+z(t)-z_0)^2}. \tag{5}$$

Тогда из условия (3) следует, что

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x_0,\quad \lim_{t\to t_0}y(t)=y_0,\quad \lim_{t\to t_0}z(t)=z_0. \tag{6}$$

Обратно: из формул (6) с помощью (5) сразу вытекает соотношение (3). Таким образом, соотношения (3) и (6) равносильны.

Из определения предела векторной функции с учетом очевидного неравенства $\big||\bar{r}(t)| - |\bar{r}_0|\big| \le |\bar{r}(t) - \bar{r}_0|$ непосредственно следует следующее свойство:

1. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}(t)=\bar{r}_0$, то и $\lim\limits_{t\to t_0}|\bar{r}(t)|=|\bar{r}_0|$.

Отметим еще четыре свойства:

2. $\lim\limits_{t\to t_0}(\bar{r}_1(t)+\bar{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t).$

3. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)\bar{r}(t))=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}(t)$

($f(t)$ — скалярная функция).

4. $\lim\limits_{t\to t_0}(\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t).$

5. $\lim\limits_{t\to t_0}(\bar{r}_1(t)\times\bar{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t).$

(Предполагается, что пределы в правых частях последних четырех равенств существуют.)

Свойства 2–5 с помощью формул (6) легко следуют из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Вектор-функция $\bar{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}(t)=\bar{r}_0$.

Из равносильности условий (3) и (6) следует, что, для того, чтобы вектор-функция $\bar{r}(t)$ была непрерывной в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были непрерывны функции x, y, z.

Из свойств пределов векторных функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, произведение скалярных функций на векторные будут непрерывны в точке t_0, если в этой точке были непрерывны все слагаемые, соответственно сомножители. В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные функции.

Перейдем теперь к вопросу о производной векторной функции скалярного аргумента.

$$\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}, \tag{7}$$

предполагая, что начало вектора $\bar{r}(t)$ находится в начале координат. Как уже отмечалось (п. 1), последнее уравнение является уравнением некоторой пространственной кривой.

Возьмем какое-нибудь фиксированное значение t, соответствующее какой-нибудь определенной точке M на кривой, заданной уравнением (7), и дадим t приращение Δt. Тогда получим вектор:

$$\bar{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\bar{i}+y(t+\Delta t)\bar{j}+z(t+\Delta t)\bar{k},$$

который определяет на кривой некоторую точку M' (рис. 115). Найдем приращение вектора:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t) = (x(t+\Delta t) - x(t))\bar{i} + (y(t+\Delta t) - y(t)\bar{j} +$$

$$+ (z(t+\Delta t) - z(t))\bar{k}. \qquad (8)$$

На рис. 115, где $\overline{OM} = \bar{r}(t)$, $\overline{OM'} = \bar{r}(t+\Delta t)$, это приращение изображается вектором $\overline{MM'} = \Delta\bar{r}(t)$.

Рассмотрим отношение $\Delta\bar{r}(t)/\Delta t$ приращения вектор-функции к приращению скалярного аргумента; это есть вектор, коллинеарный с вектором $\Delta\bar{r}(t)$, так как получается из него умножением на скалярный множитель $1/\Delta t$. При этом вектор $\Delta\bar{r}(t)/\Delta t$ направлен в сторону, соответствующую возрастанию t (направление от M к M' на рис. 115).

Действительно, если $\Delta t > 0$, то вектор $\Delta\bar{r}(t)/\Delta t = \overline{MQ'}$ имеет то же направление, что и вектор $\Delta\bar{r}(t) = \overline{MM'}$, т. е. направлен в ту сторону годографа, которая соответствует возрастанию параметра t. Если же $\Delta t < 0$, то вектор $\Delta\bar{r}(t) = \overline{MM''}$ направлен в противоположную сторону и при делении на отрицательное Δt мы получим вектор $\overline{MQ''}$, направленный снова в сторону возрастания t.

Далее с учетом выражения (8) вектор $\Delta\bar{r}(t)/\Delta t$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\bar{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\bar{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\bar{k}. \qquad (9)$$

Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют производные при выбранном значении t, то множители при $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ в равенстве (9) в пределе при $\Delta t \to 0$ обратятся в производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. Следовательно, в этом случае существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}.$$

Вектор, определяемый последним равенством, назы-

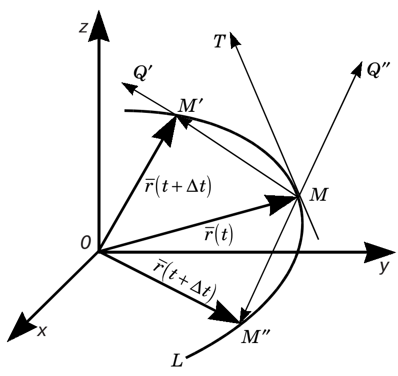


Рис. 115

вается *производной от вектора* $\bar{r}(t)$ *по скалярному аргументу* t; ее обозначают символом $\frac{d\bar{r}}{dt}$ или $\bar{r}'$. Итак,

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\overline{r'}=x'(t)\bar{i}+y'(t)\bar{j}+z'(t)\bar{k}, \tag{10}$$

или

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\bar{i}+\frac{dy}{dt}\bar{j}+\frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Выясним направление вектора $\bar{r}'(t)$. Для этого заметим, что при $\Delta t\to 0$ точка $M'(M'')$ стремится к точке M, и поэтому секущая MM' (MM'') стремится к касательной в точке M. Отсюда производная $\bar{r}'(t)$ является вектором $\overline{MT}$, касательным к годографу вектор-функции $\bar{r}(t)$, направленным в сторону, соответствующую возрастанию параметра t.

Из разложения (10) следует, что

$$|\overline{r'}(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}. \tag{11}$$

Но, как известно (9.10, п. 3, примечание), дифференциал дуги

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt,$$

откуда

$$\frac{dl}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}. \tag{12}$$

Из сопоставления формул (11) и (12) имеем:

$$|\overline{r'}(t)|=\frac{dl}{dt}. \tag{13}$$

Таким образом, модуль производной векторной функции $|\bar{r}'(t)|$ равен производной от длины годографа по аргументу t.

Если вектор-функция $\bar{r}(t)$ имеет постоянный модуль, но переменное направление, то ее производная $\bar{r}'(t)$ является вектором, перпендикулярным к вектору $\bar{r}(t)$. В самом деле, в этом случае годограф лежит на сфере, и поэтому производная $\bar{r}'(t)$ как вектор, касательный к годографу, перпендикулярна к вектору $\bar{r}(t)$.

Приведем правила дифференцирования вектор-функций (аргумент для краткости записи опустим):

1. $(\bar{r}_1+\bar{r}_2)'=\bar{r}'_1+\bar{r}'_2$. 2. $(f\bar{r})'=f'\bar{r}+f\bar{r}'$.

(f — скалярная функция, в частности $(c\bar{r})' = c\bar{r}'$, где c — скалярная постоянная).

3. $(\bar{r}_1\bar{r}_2)' = \bar{r}'_1\bar{r}_2 + \bar{r}_1\bar{r}'_2$.   4. $(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2)' = \bar{r}'_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}'_1 \times \bar{r}'_2$.

Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. 8.2, п. 1), они могут быть получены и иначе — с использованием выражения (10).

Последовательным дифференцированием можно найти производные высших порядков от векторных функций. Так,

$$\overline{r''}(t) = x''(t)\bar{i} + y''(t)\bar{j} + z''(t)\bar{k} \text{ и т. д.}$$

3. Касательная к пространственной кривой. Нормальная плоскость. Пусть точка $M(x; y; z)$ описывает некоторую пространственную кривую L (рис. 116). Параметром, определяющим положение точки M на кривой, будем считать длину l дуги AM кривой, отсчитываемую от определенной точки A кривой до точки M. Так как положение точки $M(x; y; z)$ на кривой определяется значением дуги l, то координаты x, y и z, а также радиус-вектор $\bar{r}$ этой точки можно рассматривать как функции длины дуги l:

$$x = x(l),\ y = y(l),\ z = z(t),\ \bar{r} = \bar{r}(l)$$

или в проекциях

$$\bar{r} = x(l)\bar{i} + y(l)\bar{j} + z(l)\bar{k}. \tag{14}$$

Продифференцируем вектор $r(l)$ по l. Получим новый вектор:

$$\tau = \bar{r}'_l,$$

направленный, как мы знаем (см. п. 2), по касательной к кривой в сторону возрастания параметра l (см. рис. 116). Модуль этого вектора

$$|\bar{\tau}| = |\overline{r'}_l| = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta l}\right|.$$

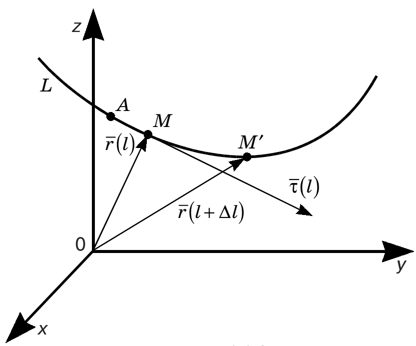


Рис. 116

(Равенство $|\overline{r'}_l| = \lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta l}\right|$ записано на основе свойства 1 пределов (п. 2).)

Но, как ранее установлено (9.10, п. 3), последний предел равен единице (он равен единице и в случае пространственной кривой).

Таким образом, вектор $\bar{\tau}$ есть единичный вектор, направленный по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания l. Если вектор $\bar{r}$ задан в проекциях (14), то, согласно формуле (10), имеем:

$$\bar{\tau}(l) = \bar{r}'_l = x'_l\bar{i} + y'_l\bar{j} + z'_l\bar{k}.$$

На основе полученных результатов легко написать уравнения касательной к кривой L в точке $M(x; y; z)$. Так как вектор $\bar{\tau}$ на искомой касательной, то (4.2, п. 3) ее уравнения будут

$$\frac{X-x}{x'_l} = \frac{Y-y}{y'_l} = \frac{Z-z}{z'_l}, \tag{15}$$

где X, Y, Z — текущие координаты точки касательной, а значения производных x'_l, y'_l, z'_l вычисляются в точке касания M. Если в уравнениях кривой вместо длины дуги l взять любой другой параметр t, то, рассматривая длину дуги l как функцию параметра t, получим:

$$x'_t = x'_l \cdot l'_t, \quad y'_t = y'_l \cdot l'_t, \quad z'_t = z'_l \cdot l'_t.$$

Следовательно, в уравнениях (15) производные x'_l, y'_l, z'_l можно заменить производными x'_t, y'_t, z'_t соответственно. Тем самым приходим и к такой форме уравнений касательной:

$$\frac{X-x}{x'_t} = \frac{Y-y}{y'_t} = \frac{Z-z}{z'_t}. \tag{16}$$

Плоскость, перпендикулярная касательной (16) и проходящая через точку касания, называется *нормальной плоскостью* к кривой L в точке M (рис. 117). Найдем уравнение нормальной плоскости к кривой L в точке $M(x; y; z)$.

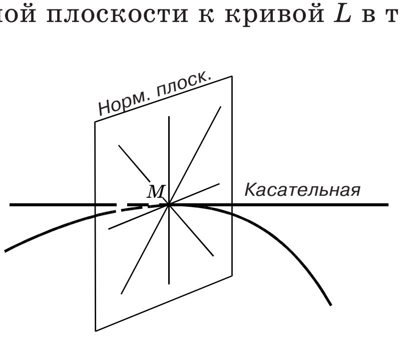


Рис. 117

Так как искомая плоскость перпендикулярна к касательной (16), то вектор (10) является нормальным этой плоскости, и потому (4.1, п. 2) ее уравнение имеет вид:

$$(X - x)x'_t + (Y - y)y'_t + (Z - z)z'_t = 0$$

(значения производных взяты в точке $M(x; y; z)$).

Упражнения

Непосредственным интегрированием или методом замены переменной вычислить интегралы.

1. $\int x^6 dx.$ $\left[\frac{x^7}{7}+C.\right]$

2. $\int \sqrt[3]{x} dx.$ $\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.\right]$

3. $\int \frac{dx}{x^5}.$ $\left[-\frac{1}{4x^4}+C.\right]$

4. $\int (x-x^3)dx.$ $\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C.\right]$

5. $\int (x^5-4x^3+x-1)dx.$ $\left[\frac{x^6}{6}-x^4+\frac{x^2}{2}-x+C.\right]$

6. $\int (2x-3\sqrt{x})dx.$ $\left[x^2-2x\sqrt{x}+C.\right]$

7. $\int \left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}\right)dx.$ $\left[\frac{x^4}{12}-\frac{3}{2x^2}+C.\right]$

8. $\int (2+\sqrt{x})^2 dx.$ $\left[4x+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.\right]$

9. $\int \frac{(x\sqrt{x}-3)^2}{x^3}dx.$ $\left[x+\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{9}{2x^2}+C.\right]$

10. $\int \frac{(2+x)dx}{x}.$ $\left[2\ln|x|+x+C.\right]$

11. $\int x^2(1+2x)dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C.\right]$

12. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx.$ $\left[2\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C.\right]$

13. $\int e^{-4x}dx.$ $\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}+C.\right]$

14. $\int (e^x-e^{-x})^2 dx.$ $\left[\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C.\right]$

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$ $\left[\sqrt{x^2+1}+C.\right]$

16. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$ $\left[\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C.\right]$

При нахождении интегралов (№ 17–19) следует предварительно в подынтегральной функции выделить целую часть.

17. $\int \frac{x^3dx}{x+1}$. $\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln|x+1|+C.\right]$

18. $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx$. $[x-2\ln|2x+3|+C.]$

19. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$. $\left[\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C.\right]$

20. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. $\left[-\ln|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}|+C.\right]$

21. $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$. $\left[\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3+C.\right]$

22. $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$. $\left[-\frac{1}{x-1}+C.\right]$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$. $\left[\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.\right]$

24. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$. $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\right]$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$. $[\arcsin(2x-3)+C.]$

26. $\int (\cos 3x-\sin 2x)dx$. $\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 2x+C.\right]$

27. $\int (\sin 3x+\cos 5x)dx$. $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+C.\right]$

28. $\int \cos(x+3)dx$. $[\sin(x+3)+C.]$

29. $\int \sin^3 x\cos x dx$. $\left[\frac{\sin^4 x}{4}+C.\right]$

30. $\int \cos^5 x\sin x dx$. $\left[-\frac{\cos^6 x}{6}+C.\right]$

При вычислении следующих интегралов использовать метод интегрирования по частям.

31. $\int xe^{2x}dx$. $\left[\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C.\right]$

32. $\int x\sin x dx$. $[-x\cos x+\sin x+C.]$

33. $\int \arcsin x dx$. $\left[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.\right]$

34. $\int x\ln x dx$. $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C.\right]$

35. $\int 2x\operatorname{arctg}x\,dx.$ $\left[(x^2+1)\operatorname{arctg}x - x + C.\right]$

36. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$ $\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.\right]$

37. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$ $\left[-x\operatorname{ctg}x + \ln|\sin x| + C.\right]$

38. $\int (2x+3)e^x dx.$ $\left[(2x+1)e^x + C.\right]$

39. $\int x^2 e^x dx.$ $\left[(x^2-2x+2)e^x + C.\right]$

40. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx.$ $\left[\frac{5}{16}\sqrt[5]{x^4}(4\ln x - 5) + C.\right]$

41. $\int \arccos 2x\,dx.$ $\left[x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C.\right]$

42. $\int x\cos 2x\,dx.$ $\left[\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.\right]$

43. $\int \operatorname{arcctg}3x\,dx.$ $\left[x\operatorname{arcctg}3x + \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C.\right]$

Вычислить интегралы от дробно-рациональных функций

44. $\int \frac{x}{x+2}dx.$ $\left[x - 2\ln|x+2| + C.\right]$

45. $\int \frac{dx}{(x+1)^4}.$ $\left[-\frac{1}{3(x+1)^3} + C.\right]$

46. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right]$

47. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}.$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C.\right]$

48. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.\right]$

49. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$ $\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.\right]$

50. $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx.$ $\left[\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right| + C.\right]$

51. $\int \frac{x+1}{x(x^3+1)}dx.$ $\left[\arcsin x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C.\right]$

52. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$ $\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C.\right]$

Найти интегралы от иррациональных функций

53. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. $\left[2(\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|)+C.\right]$

54. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$. $\left[2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C.\right]$

55. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$. $\left[-2(\sqrt{x}+\ln|\sqrt{x}-2|)+C.\right]$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$. $\left[\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}|+C.\right]$

57. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$. $\left[\sqrt{x^2-10x+29}+3\ln|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}|+C.\right]$

58. $\int \sqrt{1-x^2}dx$. $\left[\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C.\right]$

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить определенные интегралы.

59. $\int_0^1 x^4 dx$. $\left[\frac{1}{5}.\right]$

60. $\int_{-1}^1 (x^2+1)dx$. $\left[2\frac{2}{3}.\right]$

61. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$. $\left[4\frac{2}{3}.\right]$

62. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. [ln 2.]

63. $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$. $\left[\frac{e^2-1}{2}.\right]$

64. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$. [0.]

Вычислить интегралы от следующих трагонометрических функций:

65. $\int (1-\sin^2 x)dx$. $\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right]$

66. $\int (1-\cos^2 x)dx$. $\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.\right]$

67. $\int \sin 2x \cos 2x dx$. $\left[-\frac{1}{8}\cos 4x+C.\right]$

68. $\int \cos 3x \cos \frac{4}{3} x dx.$ $\left[\frac{3}{26}\sin\frac{13}{3}x + \frac{3}{10}\sin\frac{5}{3}x + C.\right]$

69. $\int \sin^5 x dx.$ $\left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C.\right]$

70. $\int \cos^5 x dx.$ $\left[\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C.\right]$

71. $\int \sin x \sin 5x dx.$ $\left[\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.\right]$

72. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$ $\left[\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.\right]$

73. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$ $\left[\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.\right]$

74. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$ $\left[\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.\right]$

75. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\right]$

76. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{5}}\right| + C.\right]$

77. $\int \frac{(1 + \sin x)dx}{(1 + \cos x)\sin x}.$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.\right]$

Вычислить определенные интегралы методом подстановки.

78. $\int\limits_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16 + x^2}}.$ [2.]

79. $\int\limits_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2 + 1)^2}.$ $\left[\frac{1}{9}.\right]$

80. $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2 - 7} dx.$ $\left[8\frac{2}{3}.\right]$

81. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}.$ [0,5.]

82. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$ [0,5.]

83. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$. $\left[2\frac{1}{3}.\right]$

Вычислить определенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

84. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$. [$e^{-2}$.]

85. $\int\limits_1^8 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}$. [8.]

86. $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$. $\left[\frac{2e^3+1}{9}.\right]$

87. $\int\limits_0^2 (3-2x)e^{-3x} dx$. $\left[\frac{5e^{-6}+7}{9}.\right]$

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

88. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

89. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$. $\left[\frac{\pi}{6}.\right]$

90. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x} dx$. $\left[\frac{1}{5}.\right]$

91. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+5}{x\sqrt[3]{x}} dx$. [Расходится.]

92. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

93. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2} dx$. $\left[-\frac{\pi^2}{8}.\right]$

94. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

[24.]

95. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 1nx$, $y = 0$, $x = 1$. $x = e$.

[1.]

96. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямой $x = 4$.

[25,6]

97. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

[4π.]

98. Найти длину кривой $r = 1 - \cos\Theta$.

[8.]

99. Найти длину арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$,

[$8a$.]

100. Найти длину кривой $\rho = a\sin\Theta$.

[$a\pi$.]

101. Найти площадь поверхности сферического сегмента, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, соответствующей изменению x от a до R $(0 < a < R)$.

[$2\pi R(R - a)$.]

102. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\left[\frac{64}{3}\pi a^2.\right]$$

103. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

$$\left[\frac{32}{5}\pi a^2.\right]$$

104. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

$$\left[\frac{\pi}{8}(e^2 - e^{-2}) + \frac{\pi}{2}.\right]$$

105. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$ и расположенной в I и II квадрантах.

$$\left[\frac{4}{3}\pi ab^2.\right]$$

106. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, и осью Ox.

[$5\pi^2 a^3$]

107. Найти координаты центра тяжести той четверти окружности $x^2 + y^2 = 1$ (с плотностью $\rho = 1$), которая расположена в первом квадранте.

[$x_c = 2/\pi$, $y_c = 2/\pi$.]

108. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ и расположенной в I квадранте (плотность $\rho = 1$).

[$x_c = 4a/3\pi$, $y_c = 4b/3\pi$.]

109. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$, $y = 0$ $(\rho = 1)$.

[$x_c = \pi/2$, $y_c = 1\pi/8$.]

Глава 10. РЯДЫ

10.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные понятия. Пусть дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n, ...

Определение 1. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*, а числа a_1, a_2, ..., a_n, ... называются *членами* ряда. Вместо (1), пользуясь знаком суммы, пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Суммы конечного числа членов ряда (1) $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, ... называются *частными* суммами (или *отрезками*) ряда (1).

Рассмотрим последовательность

$$S_1, S_2, S_3 \ldots, S_n, \ldots . \tag{2}$$

Определение 2. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) называют *сходящимся*, а число S — *суммой* этого ряда. В этом случае пишут:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если последовательность (2) не имеет предела, то ряд (1) называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии 1, q, q^2, ..., q^{n-1}, ...

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots . \tag{3}$$

Если $q \neq 1$, то, как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} \cdot q - 1}{q - 1}$$

или

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

При $|q| < 1 \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, т. е. ряд (3) при $|q| < 1$ сходится и сумма его равна $\dfrac{1}{1-q}$.

При $q = 1$ получаем ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots .$$

Следовательно, $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (3) при $q = 1$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \qquad (4)$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд (4) сходится и его сумма равна 1.

2. Основные свойства рядов. Если в ряде (1) отбросить конечное число первых членов, например m членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots, \qquad (5)$$

который называется *m-ым остатком* ряда (1).

Теорема 1. *Ряд* (5) *сходится* (*или расходится*) *одновременно с рядом* (1).

Доказательство. Обозначим

$$S_k' = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k},$$

Имеем

$$S_k' = S_{m+k} - S_m. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что существование или отсутствие предела при $k \to \infty$ частичной суммы одного ряда влечет за собой существование или отсутствие предела частичной суммы другого ряда. Теорема доказана.

Следствие 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.*

Пусть ряд (1) сходится. Тогда, согласно теореме 1, сходится и ряд (5), значит, существует его сумма. Обозначим ее через r_m. Перейдя к пределу в (6) при $k \to \infty$, получим:

$$r_m = S - S_m;$$

r_m есть та погрешность, которую мы допускаем, если вместо суммы S сходящегося ряда (1) берем сумму m первых его членов. Так как

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(S - S_m) = S - S = 0, \qquad (7)$$

то погрешность уменьшается с ростом m. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|r_m| = |S - S_m|$$

будет как угодно мала, если только число m взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность подсчитать приближенно сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов.

Однако большую трудность представляет выяснение величины возникающей ошибки, т. е. оценки $|r_m|$. Задача состоит в том, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ найти такое (наименьшее) m, чтобы выполнялось неравенство $|r_m| < \varepsilon$. В дальнейшем (см. п. 4) мы покажем, как иногда можно оценить величину ошибки и тем самым устанавливать, сколько нужно брать первых членов ряда для получения его суммы с требуемой точностью.

Заметим, что полученное выше соотношение (7) выражает следующая теорема.

Теорема 2. *Предел суммы r_m m-го остатка сходящегося ряда* (1) *при $m \to \infty$ равен нулю.*

Теорема 3 (необходимый признак сходимости ряда). *Общий член a_n сходящегося ряда* (1) *стремится к нулю при неограниченном возрастании n*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Имеем $a_n = S_n - S_{n-1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие 2. *Если общий член a_n ряда* (1) *при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Пример 1. Для ряда (3), у которого $|q| \geq 1$, имеем $|q|^{n-1} \geq 1$ для $n = 1, 2, \ldots$, т. е. q^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому такой ряд расходится.

Примечание. 1. Отметим, что условие (8) не является достаточным для сходимости ряда. Действительно, для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{9}$$

называемого *гармоническим* рядом,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Однако этот ряд расходится, что можно установить рассуждениями от противного. Предположим, что ряд (9) сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0,$$

что противоречит неравенству

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема 4. *Если ряд* (1) *сходится и его сумма равна S, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n, \tag{10}$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы соответственно рядов (1) и (10). Тогда

$$\sigma_n=ca_1+ca_2+\ldots+ca_n=c(a_1+a_2+\ldots+a_n)=cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS.$$

Теорема доказана.

Пример 2. С учетом примера 1 (п. 1) на основании теоремы 4 заключаем, что при $|q|<1$ ряд

$$c+cq+cq^2+\ldots+cq^{n-1}+\ldots,$$

где c — любое число, сходится.

Теорема 5. *Если ряд* (1) *и ряд*

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \tag{11}$$

сходятся и их суммы соответственно равны S и σ, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \tag{12}$$

сходится и его сумма равна $S+\sigma$.

Доказательство. Пусть S_n, σ_n и τ_n — частичные суммы соответственно рядов (1), (11) и (12). Тогда

$$\tau_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)=S_n+\sigma_n.$$

Отсюда с учетом теоремы 4 о пределах (7.5, п. 1)

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}(S_n+\sigma_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S+\sigma.$$

Примечание 2. При условии теоремы 5 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

также сходится и его сумма равна $S - \sigma$.

Наконец, заметим (см. [8]), что если ряд (1) сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например,

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots ,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся, и притом к S.

Однако раскрытие скобок в сходящемся ряде не всегда возможно. Так, ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

сходится, а ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots \tag{13}$$

расходится (общий член ряда (13) не стремится к нулю).

3. Положительные ряды.

Определение. *Положительным рядом* называется ряд, члены которого неотрицательны.

Пусть дан положительный ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{14}$$

т. е. $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда, очевидно,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \ (n = 1, 2, \dots),$$

т. е. последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ является неубывающей.

Это с учетом приведенного в 7.3 (п. 1) свойства 3 позволяет сформулировать следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы положительный ряд* (14) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.*

Теорема 2 (признак сравнения рядов). *Пусть даны два положительных ряда*

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \tag{B}$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \tag{C}$$

Если члены ряда (*B*) *не превосходят соответствующих членов ряда* (*C*):

$$b_n \le c_n \ (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{15}$$

то из сходимости ряда (*C*) *следует сходимость ряда* (*B*), *а из расходимости ряда* (*B*) *следует расходимость ряда* (*C*).

Доказательство. Обозначив через B_n и C_n соответственно частичные суммы рядов (*B*) и (*C*), в силу неравенства (15), будем иметь:

$$B_n \le C_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{16}$$

Если ряд (*C*) сходится, то, по теореме 1, частичные суммы C_n ограничены сверху:

$$C_n \le L\ (L = \text{const})\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) имеем: $B_n \le L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и, значит, согласно той же теореме, 1 ряд (*B*) сходится.

Пусть теперь ряд (*B*) расходится. Тогда расходится и ряд (*C*). В противном случае, согласно только что доказанному, сходился бы и ряд (*B*).

Примечание 1. Ввиду следствия 1 (п. 2), теорема 2 остается справедливой, если условие (15) выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого n.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}. \tag{18}$$

Сравниваем данный ряд со сходящимся рядом (см. п. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Имеем:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда, согласно теореме 2, получаем, что ряд (18) сходится. Попутно отметим, что тогда в силу следствия 1 (п. 2), сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{19}$$

Теорема 3 (признак Даламбера; Жан де Рон Даламбер (1717–1783) — французский математик). *Если члены положительного ряда* (14) *таковы, что существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ *ряд* (14) *сходится, а при* $\rho > 1$ *ряд* (14) *расходится.*

Доказательство. В силу определения предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_n + 1}{a_n} < \rho + \varepsilon. \tag{20}$$

Если $\rho < 1$, то выберем ε столь малым, чтобы $\rho + \varepsilon$ было меньше единицы. Полагая $\rho + \varepsilon = q$, на основании правого неравенства (20) имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad \text{или} \quad a_{n+1} < a_n q,$$

для $n = N + 1$, $N + 2$, ... Давая n эти значения, из последнего неравенства получаем:

$$a_{N+2} < a_{N+1} + q,$$
$$a_{N+3} < a_{N+2} < a_{N+1}\, q^2,$$
$$a_{N+4} < a_{N+3} < a_{N+1}\, q^3,$$

т. е. члены ряда

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \ldots \tag{21}$$

меньше соответствующих членов сходящегося ряда $a_{N+1}q + a_{N+1}q^2 + a_{N+1}q^3 + \ldots$ (см. п. 2, пример 2). Тогда по признаку сравнения ряд (21) сходится, и, следовательно, согласно теореме 1 (п. 2), сходится и ряд (14).

Пусть теперь $\rho > 1$. Возьмем ε столь малым, чтобы $\rho - \varepsilon > 1$. Тогда при $n > N$, в силу левой части неравенства (20), будет выполняться неравенство $(a_{n+1}/a_n) > 1$, или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда (14), начиная с номера $n = N + 1$, возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда (14) a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, согласно следствию 2 (п. 2), ряд (14) расходится.

Примечание 2. При $\rho = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В самом деле, для гармонического ряда $\rho = 1$, причем этот ряд расходится (см. п. 2, примечание 1). Вместе с тем для ряда (19) также $\rho = 1$, но этот ряд сходится (см. пример 1).

Примечание 3. Из доказательства признака Даламбера следует, что при $\rho > 1$ общий член a_n ряда (14) не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Примечание 4. Ряд (14) будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \infty$, так как тогда, начиная с некоторого номера $n = N$, будет $\frac{a_n + 1}{a_n} > 1$, и, значит, a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Теорема 4 (интегральный признак Коши). *Пусть члены положительного ряда* (14) *такие, что*

$$a_1=f(1),\ a_2=f(2),\ a_n=f(n),\ \ldots,$$

где функция $f(x)$ *при* $x\geq 1$ *непрерывна, положительна и убывает. Тогда ряд* (14) *и несобственный интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx \tag{22}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Из рисунка 118 (имея в виду геометрический смысл определенного интеграла) видно, что

$$I_n=\int\limits_1^{n+1}f(x)dx<f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\ldots+f(n)\cdot 1=a_1+a_2+\ldots+a_n=S_n.$$

Отсюда, учитывая, что последовательности $\{I_n\}$ и $\{S_n\}$ монотонно возрастающие ($f(x)>0$ и $a_n>0$, $n=1, 2, \ldots$), с учетом теоремы 1 и свойства 3 из 7.3 (п. 1) следует, что если ряд (14) сходится, то сходится и интеграл (22).

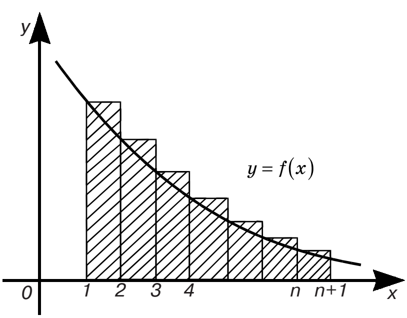


Рис. 118

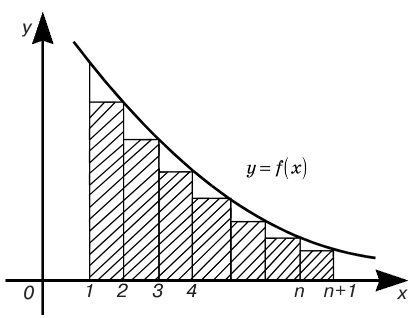


Рис. 119

Точно так же из рис. 119 ясно, что $S_{n+1} - a_1 < I_n$ откуда, подобно предыдущему, следует, что если интеграл (22) сходится, то сходится и ряд (14).

Наконец, если ряд (14) расходится, то расходится и интеграл (22), ибо в противном случае, в силу только что доказанного, сходился бы ряд (14). Аналогично, если расходится интеграл (22), то расходится и ряд (14).

Примечание 5. В интеграле (22) в качестве нижнего предела может быть фиксированное по произволу натуральное число $k > 1$. Это равносильно отбрасыванию $k - 1$ первых членов ряда (14), что на сходимость этого ряда не влияет (см. п. 2, следствие 1).

Пример 4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0). \tag{23}$$

Функция $f(x) = 1/x^{\alpha}$, $x \geq 1$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Члены ряда (23) равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \ldots$. Как установлено ранее (см. 9.9, п. 1), несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$.

В частности, при $\alpha = 2$ получим сходящийся ряд (19), при $\alpha = 1$ — расходящийся гармонический ряд (9) (см. п. 2), при $\alpha = 1/2$ расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ и т. д.

4. Знакочередующиеся ряды. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{24}$$

где

$$a_n > 0 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 1 (теорема Лейбница). *Если члены ряда* (24) *по абсолютной величине монотонно убывают*:

$$a_{n+1} < a_n \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ —} \tag{25}$$

и общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{26}$$

то ряд (24) *сходится*.

Доказательство. Частичную сумму S_{2m} можно представить двояко:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \tag{27}$$

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \tag{28}$$

Здесь в каждой круглой скобке разность положительна, в силу условия (25). Из (27) следует, что $S_{2m} > 0$ и последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастающая. Из (28) видно, что $S_{2m} < a_1$, т. е. $\{S_{2m}\}$ ограничена. Следовательно (7.3, п. 1, свойство 3), эта последовательность имеет предел

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S, \tag{29}$$

причем

$$0 < S < a_1.$$

Далее с учетом (29) и (26) имеем:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ т. е. ряд (24) сходится, причем

$$0 < S < a_1. \tag{31}$$

Пример 1. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится, так как условия теоремы Лейбница здесь выполнены.

Теорема 2. *Остаток r_n знакочередующегося ряда* (24), *удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.*

Доказательство. Если n четное, то

$$r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots.$$

Так как этот ряд удовлетворяет теореме Лейбница, то, согласно неравенству (31),

$$0 < r_n < a_{n+1}.$$

Если n нечетное, то

$$r_n = -a_{n+1} + a_{n+2} - \ldots,$$

Отсюда

$$-r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots,$$

и согласно (31)

$$0 < -r_n < a_{n+1}.$$

Отсюда

$$r_n < 0 \text{ и } |r_n| < a_{n+1}.$$

Теорема доказана.

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,1 сумму сходящегося ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots \tag{32}$$

В качестве приближенного значения S ряда (32) мы должны взять ту частичную сумму S_n, для которой $|r_n| < 0{,}1$. Согласно теореме 2, $|r_n| < 1/(n+1)$. Следовательно, достаточно положить $n + 1 = 10$, т. е. $n = 9$. Тогда

$$S_9 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\approx 0{,}74.$$

Отсюда $S \approx 0{,}7$ с точностью до 0,1.

5. Абсолютная и условная сходимость. Перейдем теперь к рядам с членами, имеющими любой знак. С каждым таким рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{33}$$

связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{34}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если сходится ряд* (34), *то сходится и ряд* (33).

Доказательство. Составим два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (p) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n, \quad (q),$$

где

$$p_n = \begin{cases} a_n, & \text{если} \quad a_n > 0, \\ 0, & \text{если} \quad a_n \le 0. \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_n \ge 0, \\ |a_n|, & \text{если} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Так как при $n = 1, 2, \ldots$ $p_n \le |a_n|$ и $q_n \le |a_n|$, то по теореме 2 (п. 3) ряды (p) и (q) сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q. Частичную сумму S_n данного ряда (33) можно с помощью обозначений для p_n и q_n переписать в виде

$$S_n = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = P - Q.$$

Следовательно, ряд (33) сходится.

О п р е д е л е н и е. Ряд (33) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (34) сходится. Если же ряд (33) сходится, а ряд (34) расходится, то ряд (33) называется *неабсолютно сходящимся* или *условно сходящимся*.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ (35)

абсолютно сходится при $a > 1$ и условно сходится при $0 < \alpha \le 1$.

В самом деле, как установлено ранее (см. п.3, пример 4), если $\alpha > 1$, то ряд (23) сходится, если же $0 < \alpha \le 1$, то ряд (23) расходится, хотя сам ряд (35) сходится по теореме Лейбница.

П е р е м е с т и т е л ь н о е   с в о й с т в о   а б с о л ю т н о   с х о д я щ и х с я   р я д о в.

Пусть дан сходящийся ряд:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \tag{36}$$

Произвольным образом переставим в нем местами члены ряда, образовав ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_k' + \ldots . \tag{37}$$

причем члены ряда (37) связаны с членами ряда (36) следующим образом:

$$a_1' = a_{n_1},\ a_2' = a_{n_2},\ \ldots + a_k' = a_{n_k},\ \ldots .$$

Т е о р е м а 2. *Если ряд* (36) *абсолютно сходится, то ряд* (37) *также абсолютно сходится и сумма его равна сумме ряда* (36), *т. е. абсолютно сходящийся ряд* (36) *обладает переместительным свойством.*

Доказательство см., например, в [8].

Условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают (см., например, [5]).

Абсолютно сходящиеся ряды обладают еще одним важным свойством: их можно перемножать.

Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots , \tag{38}$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots . \tag{39}$$

Образуем новый ряд

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots , \tag{40}$$

называемый *произведением рядов* (38) и (39). Оказывается (см. [6], т. 1), что ряд (40) также сходится абсолютно и имеет своей суммой число $S = AB$.

6. Ряды с комплексными членами. Рассмотрим числовой ряд с комплексными членами, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (41)$$

где $u_n = \alpha_n + i\beta_n$ ($n = 1, 2, 3...$).

Для этого ряда, как и для ряда с действительными членами (п. 1), вводится понятие n-й частичной суммы:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Ряд с комплексными членами (41) называется *сходящимся*, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при этом число S называется *суммой* ряда (41). Здесь пользуемся понятием *предела последовательности комплексных чисел* и понимаем его в следующем смысле: число S называется пределом последовательности $\{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|S_n - S| < \varepsilon, \qquad (42)$$

или, что то же, $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - S| = 0.$

Так же, как в случае с действительными членами (п. 2), устанавливается необходимый признак сходимости ряда (41): общий член u_n сходящегося ряда (41) стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Пример. Для ряда

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots \qquad (43)$$

(q — комплексное число, отличное от единицы) частичная сумма

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad (44)$$

так как $(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = 1 - q^n$.
Из равенства (44) имеем:

$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{|1-q|}.$$

Отсюда при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = 0.$$

Значит, при $|q| < 1$ ряд (43) сходится и его сумма S равна $1/(1 - q)$.

При $|q| \geq 1$ ряд (43) расходится, так как в этом случае его общий член q^{n-1} не стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Следующая теорема позволяет свести изучение ряда (41) с комплексными членами к исследованию таких рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n. \qquad (45)$$

Теорема 1. *Ряд* (41) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* (45).

Доказательство. Пусть ряд (41) сходится. представим его частичную сумму S_n и сумму S в алгебраической форме $S_n = a_n + ib_n$. $S + a + ib$, где a_n и b_n — частичные суммы рядов (45). Тогда условие (42) примет вид:

$$|S_n - S| = |a_n - a + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon (n > N). \qquad (46)$$

Из неравенства (46) следуют неравенства

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon \; (n > N), \qquad (47)$$

и поэтому сходятся ряды (45) соответственно к a и b. Если же ряды (45) сходятся соответственно к a и b, то выполняются неравенства (47), а вместе с ними и неравенство $|S_n - S| < \varepsilon\sqrt{2}$, показывающее сходимость ряда (41).

Теорема 2. *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \qquad (48)$$

то сходится и ряд (41).

Доказательство. Имеем:

$$|u_n| = |\alpha_n + i\beta_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \geq |\alpha_n|, \quad |u_n| \geq |\beta_n|.$$

На основании признака сравнения рядов (п. 3, теорема 2), заключаем, что сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|$, значит, и ряды (45). Следовательно, по теореме 1, сходится ряд (41).

Как и в случае рядов с действительными членами, ряд (41) называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (48) сходится. Если же ряд (41) сходится, а ряд (48) расходится, то ряд (41) называется *условно сходящимся*.

На абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами распространяются имеющие место для абсолютно сходящихся рядов с действительными членами переместительное свойство и свойство перемножения рядов (п. 5).

10.2. СТЕПЕННОЙ РЯД В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1. Область сходимости функционального ряда. Перейдем к рассмотрению рядов, членами которых являются не числа, а функции:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots u_n(x) + \dots . \tag{1}$$

Такие ряды называются *функциональными*.

Например, ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

является функциональным.

Если в ряде (1) придать x какое-либо значение x_0 из области определения функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, то получим числовой ряд:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots u_n(x_0) + \dots . \tag{2}$$

Этот ряд может сходиться или расходиться. Если он сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (1). Если ряд (2) расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда (1). Для одних точек, взятых из области определения функций $u_n(x)$, ряд (1) может сходиться, а для других — расходиться.

Определение. Совокупность все точек сходимости функционального ряда называется *областью его сходимости*.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n$ сходится в промежутке $-3 < x < 3$, так как в этом промежутке $q = |x/3| < 1$. При $|x| \geq 3$ данный ряд расходится.

2. Степенной ряд и его область сходимости.

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \tag{3}$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* степенного ряда.

Любой степенной ряд (3) сходится при $x = 0$, так как в этой точке все члены ряда (3), кроме, может быть, первого, — нули.

Есть степенные ряды вида (3), которые сходятся лишь в точке $x = 0$; такие ряды относят к рядам *первого класса*.

Например, ряд

$$1 + x + 1!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

сходится лишь в точке $x = 0$; в любой другой точке $x \neq 0$ этот ряд расходится. Действительно, при каждом $x \neq 0$ из числовой оси имеем числовой ряд. Исследуем его на сходимость. Образуем ряд:

$$1 + |x| + 2!|x|^2 + n!|x|^n + \ldots .$$

Применив к последнему ряду признак Даламбера (10.1, п. 3), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

при всех $x \neq 0$. Следовательно (см. 10.1, п. 3, примечание 4), этот ряд, значит, и данный ряд расходятся при всех $x \neq 0$.

Есть степенные ряды вида (3), которые сходятся на всей числовой оси (такие ряды относят к рядам *второго* класса). Например, ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится (притом абсолютно) на всей числовой оси, так как при каждом x из $(-\infty; +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряды вида (3), не принадлежащие первому и второму классам, относят к рядам *третьего класса*.

Теорема 1 (теорема Абеля; Нильс Генрих Абель (1802–1829) — норвежский математик). *Если степенный ряд* (3) *сходится при* $x = x_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится для любого* x, *удовлетворяющего условию*

$$|x| < |x_0|;$$

если же при $x = x_0$ *степенной ряд* (3) *расходится, то он расходится и при любом* x, *удовлетворяющем условию* $|x| > |x_0|$.

Доказательство. Пусть при $x = x_0 \neq 0$ степенной ряд (3) сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots \qquad (4)$$

Тогда (см. 10.1, п. 2, теорема 3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$$

откуда следует, что члены ряда (4) ограничены по модулю:

$$|a_n x_0{}^n| \le M,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

(M — постоянное положительное число).

Возьмем теперь любое x, для которого $|x| < |x_0|$, и рассмотрим ряд:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_n x^n| + \ldots \tag{6}$$

Имеем тождество: $|a_n x^n| = |a_n x^n{}_0|\,|x/x_0|^n$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$).

Отсюда, в силу (5), $|a_n x^n| \le M\,|x/x_0|^n$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$),

или

$$|a_n x^n| \le Mq^n\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

где $q = |x/x_0| < 1$, так как $|x| < |x_0|$.

Ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$$

сходится (см. 10.1, п. 2, пример 2). Поэтому, имея в виду неравенства (7), согласно признаку сравнения рядов (см. 10.1, п. 3) сходится ряд (6) для любого x, для которого $|x| < |x_0|$, а ряд (3), значит, для этого x сходится абсолютно.

Пусть теперь ряд (3) при $x = x_0$ расходится. Докажем, что он расходится и при любом x, удовлетворяющем неравенству $|x| > |x_0|$. Действительно, если бы при некотором значении $x = x_1$, удовлетворяющем неравенству $|x_1| > |x_0|$, ряд (3) был бы сходящимся, то по доказанному в первой части он был бы сходящимся и при $x = x_0$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Ряд второго класса* (3) *сходится абсолютно в интервале* $(-\infty;\ +\infty)$.

Следствие 2. *Для каждого степенного ряда* (3) *третьего класса существует число* $R > 0$, *называемое радиусом сходимости этого ряда и обладающее следующими свойствами: при* $|x| < R$ *ряд* (3) *сходится абсолютно, при* $|x| > R$ *ряд* (3) *расходится.*

Промежуток $(-R;\ R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (3).

Согласно следствию 1 для ряда (3) второго класса интервал сходимости $(-\infty;\ +\infty)$.

Областью сходимости степенного ряда (3) третьего класса является интервал $(-R;\ R)$, к которому в отдельных случаях добавляются один или оба конца этого интервала (это зависит от конкретного исследуемого ряда).

Примечание 1. Для ряда (3) первого класса полагают $R = 0$, для ряда (3) второго класса $R = \infty$.

Теорема 2. *Пусть для ряда* (3) *существует и отличен от нуля предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = L.$$

Тогда

$$R = \frac{1}{L}.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3):

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots + |a_n|\,|x|^n + \ldots \tag{8}$$

Применим признак Даламбера (10.1, п. 3):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|.$$

В соответствии с этим признаком ряд (8) сходится, если $|x|L < 1$, т. е, если $|x| < 1/L$, и расходится, если $|x|L > 1$, т. е. если $|x| > 1/L$ (в последнем случае общий член ряда (8), значит, и ряда (3) не стремится к нулю при $n \to \infty$).

Следовательно, ряд (3) сходится абсолютно при $|x| < 1/L$ и расходится при $|x| > 1/L$. Значит, радиусом сходимости ряда (3) является число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Примечание 2. Если $L = 0$, то при любом x из числовой оси $|x|L = 0 < 1$, т. е. ряд (8) сходится на всей числовой оси. Значит, ряд (3) абсолютно сходится на этой оси. Следовательно, $R = \infty$. Если $L = \infty$, то при любом $x \neq 0$ из числовой оси $|x|L = \infty$, и, значит, ряд (3) при любом $x \neq 0$ (10.1, п. 3, примечание 4) расходится, т. е. $R = 0$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ имеет радиус сходимости $R = 3$, так как

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

Областью сходимости данного ряда является промежуток $-3 \leq x < 3$.

3. Свойства степенных рядов.

Сформулируем эти свойства (доказательство см., например, в [12], т. 1):

Теорема. *Сумма степенного ряда* (3) *есть функция, непрерывная в каждой точке интервала сходимости ряда. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем в результате этих операций получаются степенные ряды, имеющие тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

4. Ряды по степеням разности $x - a$. *Степенным рядом* называется также функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a) + \ldots \qquad (9)$$

Интервалом сходимости степенного ряда (9) является интервал длиной $2R$ с центром в точке a.

Свойства степенных рядов по степеням x (п. 3) сохраняются и для рядов по степеням $x - a$.

5. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ является суммой ряда (9), то в этом случае говорят, что *функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $x - a$.*

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность *приближенно заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда*, т. е. *многочленом*.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ на интервале* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *разлагается в степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_2)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (10)$$

то это разложение единственно.

Доказательство. Согласно теореме п. 3, имеем:

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$
$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + (n-2)(n-1)na_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3\ldots(n - 1)na_n + 2 \cdot 3\ldots n(n + 1)a_{n+1}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая в этих равенствах и в равенстве (10) $x = x_0$, получим:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots \qquad (11)$$

Из (11) следует, что все коэффициенты ряда (10) определяются единственным образом формулами (11), что и доказывает теорему.

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (10), получим ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots, \tag{12}$$

который называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$; коэффициенты этого ряда

$$a_0=f(x_0), a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

называются *коэффициентами Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Таким образом, *если функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд по степеням* $x - x_0$, *то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.*

Если в ряде Тейлора положим $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Отметим, что все рассуждения были сделаны в предположении, что функция $f(x)$ *может быть разложена в степенной ряд*.

Если заранее этого не предполагать, а просто считать функцию $f(x)$, бесконечное число раз дифференцируемой, и составить для нее ряд Тейлора, то ниоткуда не следует, что этот ряд сходится при значениях x, отличных от x_0. Более того, могут быть даже такие случаи, что ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$, сходится, а сумма его вовсе не равна $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ имеет производные любого порядка. Тогда для любого x из этого интервала и любого n будет справедлива формула Тейлора (см. 8.9, п. 1):

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x), \tag{13}$$

где

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (14)$$

Перейдем теперь к выяснению условий, при которых можно утверждать, что ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$,

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (15)$$

сходится в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и что его сумма равна $f(x)$.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $(n + 1)$ первых членов ряда (15) есть как раз $r_n(x)$, что видно из (13), то, очевидно, для того, чтобы ряд Тейлора (15) сходился к функции $f(x)$ (для которой он составлен) в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора $r_n(x)$ для функции $f(x)$ в каждой точке этого интервала стремился к нулю при $n \to \infty$.

Установим теперь достаточное условие сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ к этой функции.

Теорема 2. *Если в интервале* $(x_0 - R; x_0 + R)$ функция $f(x)$ *имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \ (n = 1, 2, \ldots), \quad (16)$$

то в этом интервале имеет место разложение (12).

Доказательство. В силу (14) и (16) в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ имеем:

$$|r_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \le M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (17)$$

Так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

сходится при любом x по признаку Даламбера (10.1, п. 3), то при любом x (10.1, п. 2, теорема 3)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Отсюда с учетом (17) $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x) = 0$ в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$.

6. Разложение в степенные ряды основных элементарных функций.

1. $f(x) = e^x$. Здесь $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f^{(n)}(0) = 1$. Условие (16) для данной функции выполнено в любом интервале $|x| < r$, так как $f^{(n)}(x) = = e^x < e^r$. Поэтому, согласно теореме 2 (п. 5), формула

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{18}$$

верна при всех x.

2. $f(x) = \sin x$. Здесь $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$, $f^{(k)}(0) = \sin k\pi/2 = 0$ при $k = 2\pi$, $f^{(k)}(0) = (-1)^n$ при $k = 2n + 1$. При этом $|f^{(n)}(x)| \le 1$ на всей числовой оси. Поэтому, согласно теореме 2 (п. 5), формула

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

верна при всех x из $(-\infty; \infty)$.

Аналогично формула

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

верна при всех x из $(-\infty; \infty)$.

3. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^\alpha$, где α — любое вещественное число. Здесь

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1).$$

Можно доказать (см., например, в [6, т. 1]), что равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\ldots}{n!}x^n + \ldots \tag{19}$$

верно при $|x| < 1$.

Ряд (19) называется *биномиальным*.

Если $\alpha = m$, где m — натуральное число, то равенство (19) обращается в формулу бинома Ньютона (см. 8.9, п. 2):

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

Выделим следующие частные случаи биномиального ряда:

1) при $\alpha = -1$.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n; \tag{20}$$

2) при $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n;$$

3) при $\alpha = -1/2$ имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n;$$

4. Разложение $f(x) = \text{In}(1 + x)$ получим путем интегрирования ряда (21) в промежутке от 0 до x (при $|x| < 1$):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (-1 < x \le 1). \tag{21}$$

5. Разложение $f(x) = \text{arctg}\, x$ получим путем интегрирования ряда (21), если в нем предварительно заменить x на x^2:

$$\text{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ (-1 \le x \le 1). \tag{22}$$

Области сходимости рядов (21), (22) указаны в скобках.

7. Приложения степенных рядов к приближенных вычислениям.

Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы.

Пример 1. Вычислить значение $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001. Согласно формуле (18) имеем:

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} + \frac{0,2^4}{4!} + \ldots .$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов этого ряда, начиная с пятого:

$$r_4 = \frac{0,2^4}{4!} + \frac{0,2^5}{5!} + \frac{0,2^6}{6!} + \ldots = \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5} + \frac{0,2}{5 \cdot 6} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{0,2^4}{4!}\left(1 + \frac{0,2}{5} + \left(\frac{0,2}{5}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{0,0016}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,2}{5}} < 0,0001.$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем:

$$e^{0,2} \approx 1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^3}{3!} = 1,2 + \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{6} \approx 1,2213$$

(здесь можно использовать калькулятор).

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,0001. Заменяя x на $-x^2$ в формуле (14), получим:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Подставим этот ряд под знак данного интеграла и произведем почленное интегрирование, получаем:

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx=\int\limits_0^{1/4}dx-\int\limits_0^{1/4}x^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/4}x^4dx-\frac{1}{3!}\int\limits_0^{1/4}x^6dx+\ldots=$$

$$=0{,}25-\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{10\cdot 4^5}-\frac{1}{42\cdot 4^7}+\ldots \qquad (23)$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. 10.1, п. 4). Так как

$$\frac{1}{10\cdot 4^5}=\frac{1}{10240}<\frac{1}{10000}=0{,}0001,$$

то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда (23):

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx\approx 0{,}25-\frac{1}{3\cdot 4^3}\approx 0{,}25-0{,}0052=0{,}2448$$

(здесь также можно использовать калькулятор).

10.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. Круг сходимости степенного ряда. Пусть $z = x + iy$ — переменная комплексная величина. Так как действие возвышения комплексного числа в целую положительную степень известно (см. 7.7, п. 4), то можно рассматривать степенные функции комплексной переменной $\omega = z^n$, где n — натуральное число. Здесь и независимая переменная, и функция принимают комплексные значения. Изучение функций комплексной переменной специально не рассматривается в настоящей книге (такое рассмотрение имеется, например, в книге [10]). Приведем только определения простейших функций, основанные на свойствах степенных рядов.

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется степенным рядом с коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится при* $z = z_0 \neq \neq 0$, *то он сходится абсолютно при всяком* z, *для которого* $|z| <$

$< |z_0|$; *если же при* $z = z_0$ *степенной ряд расходится, то он расходится и при любом значении* z, *удовлетворяющем условию* $|z| > |z_0|$.

Доказательство точно такое же, как и доказательство теоремы Абеля для случая действительной переменной.

Рассмотрим случай, когда ряд (1) для одних значений z, отличных от нуля, сходится и для других — расходится (ряд *третьего класса*). Из теоремы Абеля следует, что существует такое положительное число R (оно называется радиусом сходимости ряда (1)), что ряд (1) сходится абсолютно при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Круг $|z| < R$ называется *кругом сходимости степенного ряда* (1) ($|z| < R$ есть круг, так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 7.7, п. 1).

Если ряд (1) сходится при всех значениях z (ряд *второго класса*), то принято говорить, что его радиус сходимости $R = +\infty$. При $z = 0$ сходятся все степенные ряды рассматриваемого вида (1). Если ряд (1) сходится только при $z = 0$ (ряд *первого класса*), то полагают, что его радиус сходимости $R = 0$.

Пример. Ряды

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{3}$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{4}$$

сходятся абсолютно при любом значении z. Действительно, так как соответствующие степенные ряды (см. 10.2, п. 5) были сходящимися на всей числовой оси, то, в силу теоремы Абеля, они будут сходиться абсолютно для любого комплексного z. Следовательно, для рядов (2) — (4) $R = +\infty$.

2. Показательная и тригонометрическая функции комплексной переменной. Функция e^z комплексной переменной z определяется как сумма ряда

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{5}$$

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место формула

$$e^z e^w = e^{z+w}. \tag{6}$$

В самом деле, так как ряд (2) абсолютно сходится при всех значениях z, то можно применить свойство об умножении абсолютно сходящихся рядов (см. 10.1, п. 6). Получаем, что

$$e^z e^\omega = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (z + \omega) + \frac{(z+\omega)^2}{2!} + \ldots + \frac{(z+\omega)^n}{n!} + \ldots = e^{z+\omega}.$$

Из доказанной формулы (6) следует, что $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, и потому $e^{-z} = 1/e^z$. Значит, функция e^z ни при каком z не обращается в нуль. В самом деле, если бы имело место равенство e^{z_0} = = 0, то мы получили бы, что

$$1 = e^{z_0 - z_0} = e^{z_0} e^{-z_0} = 0 \cdot e^{-z_0} = 0.$$

Функции sin z и cos z комплексной переменной z определяются как суммы степенных рядов:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{7}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{8}$$

Очевидно,

$$\sin(-z) = -\sin z,\ \cos(-z) = \cos z. \tag{9}$$

На основе формул (5), (7) и (8), учитывая, что в абсолютно сходящемся ряде имеет место переместительное свойство (10.1, п. 6), имеем:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \frac{i^7 z^7}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Итак,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{10}$$

Отсюда с учетом равенств (9)

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{11}$$

Складывая равенства (10) и (11) и деля на 2, получаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{12}$$

Аналогично

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (13)$$

Формулы (10, (12), (13) называют *формулами Эйлера*. Пользуясь формулами (6) и (10), имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. *показательная функция e^z имеет период $2\pi i$*.

Наконец, пользуясь формулой (10), из тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (7.7, п. 3) получаем так называемую *показательную форму* записи комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

10.4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

1. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* друг

другу на отрезке $[a; b]$, если $\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$

Система функций называется *ортогональной* на отрезке $[a; b]$, если каждые две функции из этой системы ортогональны друг другу на этом отрезке.

Пример. Тригонометрическая система функций

$$1.\ \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots \qquad (1)$$

ортогональна на стрезке $[-\pi; \pi]$.

В самом деле, если $k \neq 0$ и целое, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \qquad (3)$$

Это значит, что единица ортогональна ко всем остальным функциям системы (1).

Заметим теперь, что при натуральных m, n произведения $\sin nx \sin mx$ ($m \neq n$), $\cos nx \cos mx$ ($m \neq n$), $\sin x \cos mx$ всегда можно представить суммой функций вида $\sin kx$ или $\cos kx$. Поэтому интеграл от $-\pi$ до π от этих произведений также равен нулю.

Укажем еще на одно свойство системы (1), заключающееся в том, что при любом натуральном n

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi. \qquad (4)$$

2. Ряд Фурье. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots,$$

или, более кратко, ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \qquad (5)$$

где a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, ...,) — постоянные числа, называемые *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Свободный член ряда записан в виде $a_0/2$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Так как члены ряда (5) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π.

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой ряда (5):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \qquad (6)$$

В таком случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд. Предположим также, что $f(x)$ — интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, а ряд (6) можно почленно интегрировать на этом отрезке. Интегрируя ряд (6), с учетом формул (2) и (3) получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=a_0\pi.$$

Отсюда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

Умножим теперь ряд (6) на $\cos kx$ (k — фиксированное натуральное число), а затем проинтегрируем полученный ряд на отрезке $[-\pi; \pi]$. Принимая во внимание ортогональность тригонометрической системы функций (1) на отрезке $[-\pi; \pi]$, будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos^2 kx dx$$

или, согласно формуле (4),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\pi, \text{ откуда } a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Аналогично, умножая обе части равенства (6) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π, получим: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$

Таким образом, коэффициенты ряда (6) определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (7)$$

($n = 1, 2, \ldots$) и называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а ряд (5) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* (Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик) функции $f(x)$.

3. Комплексная форма ряда Фурье. По формулам Эйлера (см. 10.3, п. 2, формулы (12), (13))

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в ряд (6), получаем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_0, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}. \qquad (8)$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}),$$

или, более компактно,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье.*

Выразим коэффициенты c_n и c_{-n} через интегралы. Пользуясь формулами (7), можем формулы (8) переписать так:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) можно объединить в одну формулу:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

4. Сходимость ряда Фурье. Если для функции $f(x)$ существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул (7), то по этим формулам можно вычислить коэффициенты a_0, a_n, b_n и составить тригонометрический ряд (5), который представляет собой ряд Фурье, соответствующий данной функции.

Является ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся и если он сходится, то имеем ли мы право утверждать, что он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций.

Сформулируем достаточные условия представимости функции рядом Фурье. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет *условиям Дирихле* (Петер Дирихле (1805–1859) — немецкий математик). Это значит, что она на этом отрезке непрерывна или кусочно-непрерывна (т. е. имеет конечное число точек разрыва первого рода) и монотонна или кусочно-монотонна (т. е. отрезок можно разделить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна).

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi; \pi]$ и сумма этого ряда равна $f(x)$ в точках непрерывности функции*, $(f(x_0 - 0) + (f(x_0 + 0))/2$ в точке x_0 *разрыва функции,* $(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0))/2$ на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

Доказательство см. в книге [12, т. II].

Сделаем некоторые замечания по поводу сформированной теоремы Дирихле. Члены ряда (5) — периодические функции с периодом 2π. Поэтому если ряд (5) сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то он сходится и при всех вещественных значениях x и сумма ряда (5) периодически повторяет с периодом 2π те значения, которые она давала на отрезке $[-\pi; \pi]$. Таким образом, если мы пользуемся рядом Фурье вне отрезка $[-\pi; \pi]$, то мы должны считать, что функция $f(x)$ продолжена вовне этого отрезка периодически с периодом 2π (рис. 120). С этой точки зрения его концы $x = -\pi$, $x = \pi$ явятся для продолженной таким образом функции точками разрыва, если $f(-\pi + 0) \neq f(\pi - 0)$.

На рис. 120 изображена функция, непрерывная на отрезке $[-\pi; \pi]$, которая при периодическом продолжении дает разрывы в силу несовпадения значений $f(x)$ на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

Пример. Функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. По формулам (7), имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}.$$

Следовательно, согласно теореме Дирихле, при $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

В точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда Фурье по теореме Дирихле не совпадает со значениями функции $f(x) = x$, а равна

$$\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

В силу периодичности суммы ряда график этой суммы имеет вид, изображенный на рисунке 121.

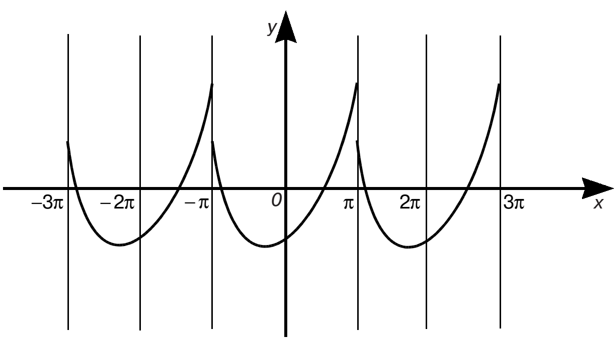


Рис. 120

5. Ряды по косинусам и синусам. Если $f(x)$ — четная функция на отрезке $[-\pi; \pi]$, т. е. если $f(-x) = f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$, то ее коэффициенты Фурье b_n, равны нулю. В самом деле,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right).$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x = -t$. Тогда, пользуясь четностью $f(x)$ и нечетностью синуса, получим:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin n(-t) dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt dt.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Коэффициенты a_n, в этом случае (это тоже легко показать) можно подсчитать по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Аналогично показывается, что если $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, если функция четная, то ее ряд Фурье содержит только косинусы (*неполный ряд по косинусам*), а если нечетная — только синусы (*неполный ряд по синусам*).

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Так как она четная, то

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

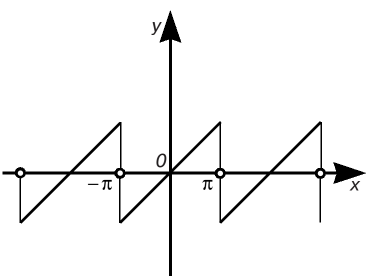


Рис. 121

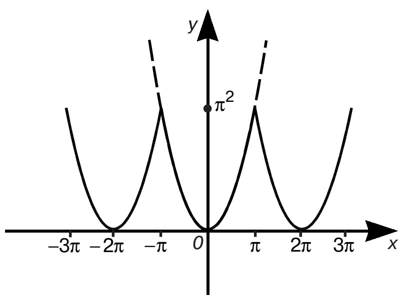


Рис. 122

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx\right) = (-1)^n \pi \frac{4}{n^2}.$$

Значит, согласно теореме Дирихле, при $-\pi < x < \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right).$$

Это равенство остается верным и на всем отрезке $[-\pi; \pi]$, так как в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда по Теореме Дирихле равна $(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))/2 = (\pi^2 + \pi^2)/2 = \pi^2$. Благодаря периодичности суммы ряда график ее имеет вид, изображенный на рис. 122.

6. Разложение функции, заданной в промежутке, в косинус и синус ряд Фурье. Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; \pi]$.

Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Дополним определение данной функции $f(x)$ так, чтобы при $-\pi \le x < 0$ было $f(x) = f(-x)$. В результате получится четная функция (в этом случае говорят: *функция $f(x)$ продолжена с отрезка* $[0; \pi]$ *на отрезке* $[-\pi; 0]$ *четным образом;* рис. 123). Тогда для «продолженной» четной функции справедливы все предыдущие рассуждения (п. 5), и, следовательно, коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В этих формулах фигурируют лишь *заданные* на $[0; \pi]$ значения $f(x)$. Следовательно, при практических вычислениях *фактически* можно и не осуществлять указанное четное продолжение.

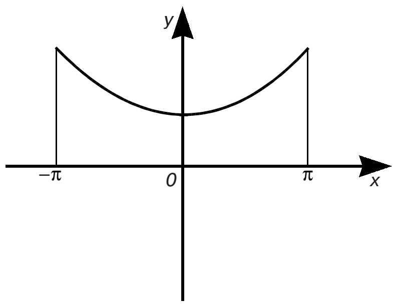


Рис. 123

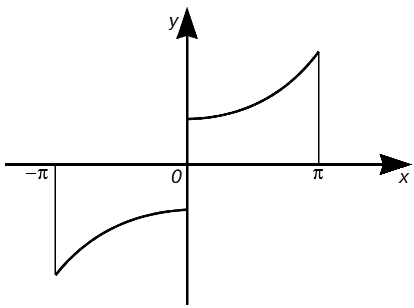


Рис. 124

Если мы хотим разложить функцию $f(x)$ в ряд по синусам, то продолжаем ее с отрезка $[0; \pi]$ на отрезок $[-\pi; 0]$ нечетным образом (рис. 124).

Если мы дополним определение функции $f(x)$ так: $f(x) = -f(-x)$ при $-\pi \le x < 0$, то получим нечетную функцию (говорят: $f(x)$ *продолжена нечетным образом*). При этом по смыслу нечетности должны принять $f(0) = 0$. К «продолженной» нечетной функции опять применимы соображения, приведенные в п. 5, и, следовательно, для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку здесь участвуют лишь значения $f(x)$ на $[0; \pi]$, то, как и в случае ряда по косинусам, *фактически* продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[0; \pi]$ на отрезок $[-\pi; 0]$ можно и не осуществлять.

7. Ряд Фурье с произвольным промежутком. Если надо разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x)$ периода $2l$, которая на отрезке $[-l; l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то мы полагаем $x = lt/\pi$ и получаем функцию $\varphi(t) = f(lt/\pi)$ периода 2π:

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f(x + 2l) = f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t),$$

которая на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Поэтому в интервале $(-\pi; \pi)$

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Возвратившись к прежней переменной x, получим, что в интервале $(-l; l)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{11}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Коэффициенты a_0, a_n, ..., b_n, ($n = 1, 2, \ldots$) и здесь называются *коэффициентами Фурье для* $f(x)$, а ряд (11) — рядом Фурье для $f(x)$.

Если x — точка разрыва функции $f(x)$, то вместо $f(x)$ в равенстве (11) будет $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Упражнения

Найти сумму ряда:

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ [2.]

2. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ $\left[\frac{3}{4}.\right]$

3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ $\left[\frac{1}{3}.\right]$

4. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$ $\left[\frac{1}{2}.\right]$

5. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots$ $\left[\frac{11}{18}.\right]$

Исследовать сходимость ряда:

6. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$ [Расходится]

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}.$ [Расходится]

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+n)^n}.$ [Расходится]

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$ [Расходится]

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}.$ [Сходится]

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$. [Условно сходится]

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)^2}{n^2+1}$. [Расходится]

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$. [Абсолютно сходится]

Найти область сходимости ряда:

14. $\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$. $\left[|x|<\frac{1}{3}.\right]$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$. $[|x| < 1.]$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{n}$. [$|x| < 1$; при $x = 1$ условно сходится.]

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{n+1}$. $[|x| < 1.]$

18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{e^n}$. $[|x| < \mathrm{e}.]$

19. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 7^n}$. [$|x| < 7$; при $x = -7$ условно сходится.]

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$. $[-\infty < x < +\infty.]$

Разложить в ряд по степеням x следующие функции:

21. e^{-x^2}. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},\quad |x|<+\infty.\right]$

22. xe^{-2x}. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{2+1}}{n!},\quad |x|<+\infty.\right]$

23. $\sin x^2$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!},\quad |x|<+\infty.\right]$

24. $\cos^2 x$. $\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<+\infty.\right]$

25. $\frac{1}{1-x^2}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\quad |x|<1.\right]$

26. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1.\right]$

27. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x|<1.\right]$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad |x|<1.\right]$

29. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}, \quad |x|\le 2.\right]$

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 0,001

30. $\sqrt{e}$. [1,649.]

31. $\sin 18^\circ$, [0,309.]

32. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$. [0,747.]

33. Разложить в ряд Фурье функцию $\varphi(x) = |x|$ в промежутке $[-\pi; \pi]$.

$$\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\right]$$

34. Разложить в ряд Фурье функцию $\varphi(x) = \pi + x$ в промежутке $[-\pi; \pi]$.

$$\left[\pi+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.\right]$$

35. Вычислить: а) $e^{\pi i}$; б) $e^{-2\pi i}$; в) $e^{-\frac{\pi i}{2}}$.

[а) -1; б) 1; в) $-i$]

Глава 11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

11.1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Определение функции нескольких переменных. Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S = xy$, т. е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Пример 2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y и z, выражается формулой $V = xyz$, т. е. значения V определяется совокупностью значений x, y и z.

Пример 3. Абсолютная температура T, давление p и объем V данной массы газа связаны формулой Менделеева-Клапейрона $pV = RT$, где R — некоторая постоянная. Отсюда, например, $V = RT/p$, т. е. значения V определяются совокупностью значений T и p.

Пример 4. Количество тепла Q, выделяемое электрическим током, зависит от напряжения U, силы тока I и времени t, причем $Q = 0{,}24UIt$, т. е. значения Q определяются совокупностью значений U, I и t.

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие функций нескольких переменных.

Переменная z называется *функцией двух независимых переменных* x и y, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z.

Множество G пар значений x и y, которые могут принимать переменные x и y, называется *областью определения* или *областью существования функции*, а множество всех значений, принимаемых z в области определения, — *областью значений функции* z. Переменные x и y называются аргументами функции z. Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

Как известно (1.1, п. 1), пара чисел x и y, определяет положение точки M на плоскости xOy с координатами x и y (и, значит, радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ (2.1, п. 8)) и наоборот. Поэтому функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать либо как функцию точки M и писать $z = f(M)$, либо как скалярную функцию векторного аргумента $\bar{r}$ и писать $z = f(\bar{r})$.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. В этой книге наиболее важным является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью формулы. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Пример 5. Областью определения функции $z = 1 - x - y$ является множество всех пар чисел (x, y), т. е. плоскость xOy, а областью значений этой функции — промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Пример 6. Для функции $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ область определения — вся плоскость xOy, а область значений — промежуток $[0; +\infty]$.

Пример 7. Областью определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ (здесь речь идет лишь о действительных значениях z) или неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$, т. е. круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$, включая эту окружность (замкнутый круг). Область значений этой функции — отрезок $[0; 1]$.

Пример 8. Область определения функции $z=1/\sqrt{1-x^2-y^2}$ есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$, исключая эту окружность (открытый круг), а область значений — промежуток $[1; +\infty)$.

Из рассмотренных примеров видно, что областью определения функции двух переменных может быть вся плоскость xOy или ее часть.

Известно (см. 2.1, п. 8), что каждой тройке чисел (x, y, z) в пространстве $Oxyz$ соответствует точка $M(x, y, z)$ (и значит, радиус-вектор $\bar{r}=\overline{OM}$) и наоборот. Совершенно аналогично случаю двух переменных можно дать определение функции трех переменных $u = f(x, y, z) = f(M) = f(\bar{r})$. Областью определения функции трех переменных будет уже все пространство или его часть.

Аналогично можно дать определение функции четырех и более числа переменных.

В дальнейшем будем подробно рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Распространение определений и полученных результатов на функции трех или более переменных представляет собой, как правило, лишь технические трудности.

2. Геометрическое изображение функции двух переменных. Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. *Графиком* функции $z = f(x, y)$, определенной в области G, называется множество точек $(x; y; z)$ пространства, у которых (x, y) принадлежит G и $z = f(x, y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность (см. также главу 4). Например, графиком функции из примера 5 (п. 1) является плоскость, проходящая через точки (1; 0; 0), (0; 1; 0) и (0; 0; 1) (4.1, п. 5); графиком из примера 6 (п. 1) — эллиптический параболоид (6.1, п. 2).

Однако построение графиков функций двух переменных в большинстве случаев представляет значительные трудности. В связи с этим оказывается удобным геометрически описывать функции двух переменных, не выходя в трехмерное пространство. Средством такого описания являются *линии уровня*. Отметим на плоскости xOy все те точки (x, y), в которых функция $f(x, y)$ принимает одно и то же значение, например, значение, равное c. Иначе говоря, отмечаем те точки (x, y), для которых

$$f(x, y) = c. \tag{1}$$

Множество этих точек и называется линией уровня функции $f(x, y)$. Понятно, что уравнение (1) есть уравнение этой линии. Придавая c различные значения и каждый раз строя линию с уравнением (1), получим семейство линий уровня. Это семейство наглядно описывает функцию $f(x, y)$. Обычно рядом с линией уровня ставят то значение c, которому она соответствует.

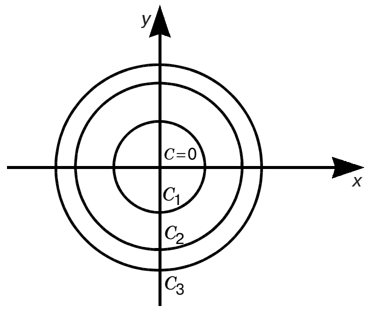


Рис. 125

Пример. Построить линии уровня функции

$$z = x^2 + y^2. \tag{2}$$

Пересечем поверхность (2) плоскостью $z = c$ $(0 \le c < +\infty)$. Задавая c различные значения, например $c = 0, 1, 2, 3, \ldots$, получим семейство линий уровня, представляющих собой окружности. При $c = 0$ окружность вырождается в точку (0; 0) (рис. 125). Из того, что линиями уровня оказались окружности с центрами в начале координат, следует, что графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Ox. Действительно, как известно из аналитической геометрии (5.2, п. 2), уравнение (2) определяет параболоид вращения.

Линиями уровня обозначают глубину морей и высоту гор на географических картах. Аналогичные линии описывают распределение тех или иных веществ в почве, распределение среднесуточной температуры и т. д.

3. Предел функции двух переменных. Множество точек $M(x, y)$, координаты которых x и y удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, или, короче, $MM_0 < \delta$, называются δ-*окрестностью* точки $M_0(x_0; y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 — это все точки, лежащие внутри круга с центром M_0 радиуса δ.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y) = f(M)$ при стремлении точки M к точке $M_0(x_0; y_0)$, что кратко записывается $M \to M_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек M из области определения этой функции, удовлетворяющих условию $0 < MM_0 < \delta$, имеет место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Функция $z = f(M)$ называется *бесконечно малой* при $M \to M_0$, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=0.$

Все основные свойства о бесконечно малых и о пределах, установленные в гл. 7 (7.4, 7.5) для функций одной переменной, обобщаются и на случай функций двух и большего числа переменных.

4. Непрерывность функции двух переменных. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит области определения функции $z = f(x, y) = f(M)$.

Определение. Функция $z=f(x,y)=f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0, если

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0), \tag{3}$$

причем точка M стремится к точке M_0 произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Обозначим $x-x_0=\Delta x$, $y-y_0=\Delta y$. *Полным приращением функции* $z = f(x, y) = f(M)$ при переходе от точки M_0 к точке M называется разность значений функции в этих точках, а именно: $\Delta z = f(M) = f(M_0)$, т. е. $\Delta z = f(x, y) - f(x_0; y_0)$.

Условие (3) непрерывности функции в точке M_0 равносильно условию:

$$\lim_{M\to M_0} \Delta z=0 \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta z=0.$$

Пример. Функция $z=x^2+y^2$ непрерывна в любой точке плоскости xOy, так как при любых значениях x и y величина $\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Арифметические операции над непрерывными в точке функциями приводят к непрерывным функциям в той же точке (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в этой точке в нуль). Это устанавливается так же, как для функций одной переменной (7.6, п. 1).

5. Понятие области. *Областью*, или *открытой областью*, называется множество точек плоскости, обладающее следующими двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство *открытости*);

2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией (непрерывная линия — множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых заданы как непрерывные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \le t \le b$), целиком лежащей в этой области (свойство *связности*).

Часть плоскости, лежащая внутри замкнутого контура L (рис. 126), является областью, так как, во-первых, для любой точки M, лежащей внутри L, существует окрестность, также лежащая внутри L; во-вторых, две любые точки M и N, лежащие внутри L, можно соединить непрерывной линией, также лежащей внутри L.

Точка M_0 называется *граничной* точкой области G, если любая окрестность этой точки содержит как точки области G, так и точки, ей не принадлежащие (см. рис. 126).

Множество всех граничных точек области называется ее *границей*. На рис. 126 любая точка контура L, очевидно, является граничной.

Если к открытой области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется *замкнутой областью*. Так, область определения функции в примере 7 (п. 1) является замкнутой.

Если для данной области можно подобрать круг, полностью ее покрывающий, то такая область называется *ограниченной*. Например, области определения функций в примерах 7, 8 (п. 1) являются ограниченными.

Область G (открытая или замкнутая) называется *односвязной,* если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G. Например, области определения функций в примерах 5–8 (п. 1) являются односвязными. Область же, заключенная между окружностями $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, не является односвязной, так как окружность $x^2 + y^2 = 3$, лежащая в этой области, содержит внутри себя и точки, не принадлежащие области (например, начало координат).

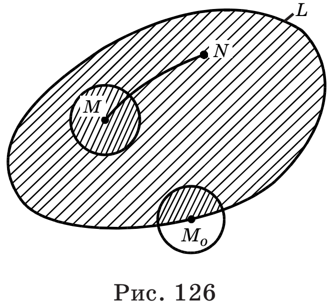


Рис. 126

Примечание. Все введенные в этом пункте понятия почти без изменения переносятся на пространство трех и большего числа измерений.

6. Основные свойства непрерывных функций двух переменных. В 7.6 (п. 3) были рассмотрены свойства функций, непрерывных на отрезке. Эти свойства распространяются и на случай функций двух и большего числа переменных, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

Функция $z = f(x, y) = f(M)$ называется *непрерывной* в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области. При этом функции $f(M)$ считается непрерывной в граничной точке M_0, если в равенстве $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ точка M стремится к точке M_0 вдоль любого пути, принадлежащего данной области.

Имеет место следующее предложение:

Если функция $z = f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

1) имеет наибольшее и наименьшее значения;

2) ограничена $|f(M)| \leq K$ (K — положительное число);

3) принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями, т. е. если $A < C < B$, где A и B — какие-то значения функции $f(M)$ в данной области, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = C$.

Из свойства 3, в частности, следует, что если M_1 и M_2 — точки данной области в $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то в этой области существует точка M_0, в которой $f(M_0) = 0$.

Примечание. Заметим, что на случай функций двух и большего числа переменных распространяется (см. [7]) теорема 5 из п. 1 (7.6).

11.2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Частные производные. *Частной производной* функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными). Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ частные производные определяются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если эти пределы существуют. Величина $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0)$ ($\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$) называется *частным приращением* функции z в точке M_0 по аргументу $x(y)$. Используются и другие обозначения частных производных:

$$z'_x, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0), \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$. Символы $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ как дроби трактовать нельзя (в этом отличие от случая одной переменной).

Из определения следует геометрический смысл частной производной функции двух переменных: частная производная $f_x'(x_0, y_0)$ ($f_y'(x_y, y_0)$) есть *угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$* ($x = x_0$) в соответствующей точке (рис. 127).

Пользуясь понятием скорости изменения переменной (см. 8.1, п. 2), можно сказать, что частная производная $f_x'(x_0, y_0)$ ($f_y'(x_y, y_0)$) есть скорость изменения функции $f(x, y)$ относительно x (y) при постоянном y (x).

Из определения частных производных следует, что правила вычисления их остаются теми же, что и для функций одной переменной (8.2), и только требуется помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример 1. Если $z = x^2 + y^2$, то $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$.

Пример 2. Если $p = RT/V$, то $p_T = R/V$, $p'_V = -RT/V^2$. Величина p'_V называется *изометрическим коэффициентом упругости* идеального газа.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные функции трех и большего числа независимых переменных.

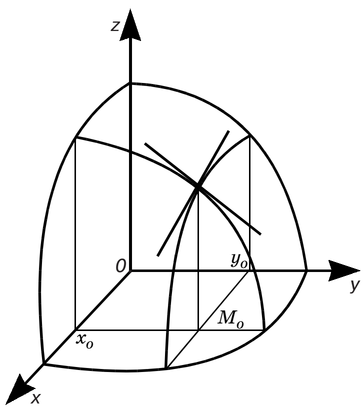


Рис. 127

2. Полный дифференциал. Как уже отмечалось (11.1, п. 4), полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), соответствующим приращениям Δx, Δy, переменных x и y, называется выражение

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1)$$

Если приращение (1) можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (2)$$

где A и B не зависят от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю Δx и Δy, то функция $z = f(x; y)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x_0; y_0)$, а линейная часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции (т. е. часть Δz, которая зависит от Δx и Δy линейно) называется *полным дифференциалом* (или просто *дифференциалом*) этой функции в точке $(x_0; y_0)$ и обозначается символом dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (3)$$

Из определения дифференцируемости функции следует, что если данная функция дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если в точке $(x_0; y_0)$ функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то для этой точки Δz представимо в форме (2), откуда следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

а это и означает, что в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ непрерывна.

Из дифференцируемости функции в данной точке следует существование ее частных производных в этой точке (*необходимое условие дифференцируемости*).

В самом деле, пусть функция $z = f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$ дифференцируема. Тогда имеет место соотношение (2). Полагая в нем $\Delta y = 0$, имеем:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\,\Delta x.$$

Деля на $\Delta x \neq 0$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x, 0)) = A.$$

Это означает, что в точке $(x_0; y_0)$ существует частная производная функция $z = f(x, y)$ по x и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A. \quad (4)$$

Аналогично доказывается, что в точке $(x_0; y_0)$ существует частная производная

$$\frac{\partial z}{\partial y}=B. \qquad (5)$$

Используя формулы (4) и (5), можно переписать выражение (3) в виде:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Если положить $z = x$, то $dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$, т. е. $dx = = \Delta x$. Аналогично, полагая $z = y$, *получим* $dy = \Delta y$. Значит, дифференциалы независимых переменных совпадают с приращениями этих переменных, и мы можем записать дифференциал (3) в следующем виде: $dz= f_x'(x_0, y_0)dx + f_y'(x_y, y_0)dy$.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ и эти производные непрерывны в самой точке M_0, то эта функция дифференцируема в точке M_0.*

Доказательство. Дадим переменным x_0 и y_0 столь малые приращения Δx и Δy, чтобы точка $M(x_0+ \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не вышла за пределы указанной окрестности точки M_0. Полное приращение $\Delta z = f(x_0 +\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно записать в виде:

$$\Delta z = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + \\ + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)).$$

Каждая из этих разностей представляет частное приращение функции. Преобразуем каждую из этих разностей по формуле Лагранжа (см. 8.6, п. 3). Получим:

$$\Delta z = f_x'(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y'(x_0, y_0 + \Theta_1\Delta y)\Delta y \; (0 < Q, Q_1 < 1) \qquad (6)$$

Так как производные f_x' и f_y' непрерывны в точке M_0, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x'(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x'(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y'(x_0, y_0+\Theta_1\Delta y)=f_y'(x_0, y_0).$$

Отсюда (см. 11.1, п. 3; 7.5, п. 1)

$$f_x'(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x'(x_0, y_0) + \alpha,\; f_y'(x_0, y_0 + \Theta_1\Delta y) = \\ = f_y'(x_0, y_0) + \beta,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Подставляя эти значения в равенство (6), находим:

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_y, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

а это и означает, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0.

3. Производные и дифференциал сложной функции. Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда в конечном итоге z будет функцией одной переменной t; предположим, что z_x', z_y' непрерывны и dx/dt, dy/dt существуют. Найдем dz/dt. Дадим переменной t приращение Δt. Тогда x, y, а следовательно, и z получат свои приращения Δx, Δy и Δz. В силу достаточного условия дифференцируемости

$$\Delta z = f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x'(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Устремим теперь Δt к нулю. Тогда Δx и Δy будут стремиться к нулю, так как функции x и y непрерывны (мы предположили существование производных x_t' и y_t'), а потому α и β также будут стремиться к нулю. В пределе получим:

$$\frac{dz}{dt} = f_x'(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y'(x, y)\frac{dy}{dt},$$

или, короче,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (7)$$

Формула (7) называется формулой *производной сложной функции*.

Пример 1. Пусть $z = f(x, y)$, $x = t^3 + 3$, $y = 2t^4 + 4$. По формуле (7) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot 8t^3.$$

Предположим, в частности, что роль независимой переменной играет x, т. е. рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$. Согласно формуле (7), будем иметь:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad (8)$$

так как $dx/dx = 1$. В формуле (8) z_x' — частная производная по первому аргументу функции двух переменных $f(x, y)$, а dz/dx — обычная производная сложной функции одной переменной x: $z = f(x, \psi(x))$. Последнюю производную будем называть *полной* *производной* функции. В случае, когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(y)$, аналогично получаем:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

(z_y' — частная производная по второму аргументу функции $f(x, y)$, dz/dy — полная производная функции одной переменной y: $z = f(\varphi(y), y)$).

Пусть теперь $x = \varphi(t, \tau)$, $y = \psi(t, \tau)$ (здесь предполагается существование первых производных функций x и y по t и τ). В этом случае z будет функцией двух независимых переменных t и τ. Следовательно, для этого случая формулу (7) нужно переписать в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{9}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}. \tag{10}$$

Пример 2. Если $z = xy$, где $x = t \cos 2\tau$, $y = t^2{}_\tau$, то $z_t' = y \cos 2\tau + 2xt\ \tau$, $z_\tau' = -2yt \sin 2x + xt^2$.

Из формул (9) и (10) видно, что символ частной производной, как уже отмечалось выше, нельзя трактовать как дробь. В самом деле, если бы можно было сократить на dx и dy, то из формул (9) и (10) получили бы, что

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} = 2\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

4. Неявные функции и их дифференцирование. Как уже отмечалось (см. 7.1, п. 4), если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной x, не разрешено относительно y, то эта функция называется *неявной*. Разрешая это уравнение относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Однако часто бывает, что разрешить такое уравнение относительно y невозможно (например, $2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$) или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общем виде (когда все его члены перенесены в левую часть):

$$F(x, y) = 0. \tag{11}$$

В связи с этим встает вопрос о том, как найти производную неявной функции, не разрешая уравнения (11) относительно y.

Если в уравнении (11), определяющем неявную функцию $y = f(x)$, задавать значения независимой переменной x, то для нахождения соответствующего значения y надо решать уравнение. Теперь, если в это уравнение подставить его решение, то получится тождество. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = f(x)$, определенная уравнением (11), — это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (11), обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x (предполагаем, что $F(x, y)$ — дифференцируемая функция) согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда при $F'_y(x, y) \neq 0$ вытекает формула для производной неявной функции:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{12}$$

Пример 1. Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy} - x - y = 0$. Найти dy/dx.

Для $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ имеем $F_x' = ye^{xy} - 1$, $F_y' = xe^{xy} - 1$ и, согласно формуле (12),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}.$$

Пусть уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{13}$$

определяет z как неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ независимых переменных x и y.

Пользуясь формулой (12), из равенства (13) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{14}$$

Пример 2. Найти частные производные неявной функции z, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Согласно формулам (14),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Рассмотрим некоторую поверхность

$$F(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

и на ней точку $M_0(x_0; y_0, z_0)$. Проведем через точку M_0 какую-нибудь линию L, целиком лежащую на поверхности (15) (рис. 128).

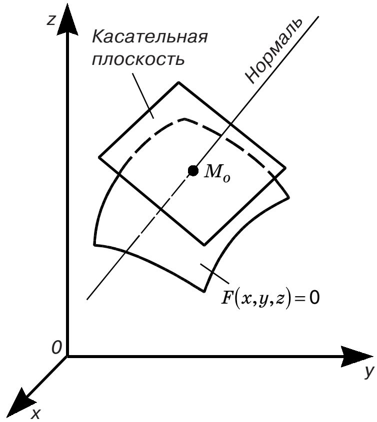


Рис. 128

Пусть параметрические уравнения линии L

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \omega(t),$$

причем при $t = t_0$ получаем координаты точки M_0. Так как каждая точка линии L лежит на данной поверхности (15), то при любом значении параметра t будет:

$$F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0.$$

Но тогда это соотношение есть тождество относительно t. Дифференцируя его (предполагается, что φ, ψ, ω — непрерывно дифференцируемы, причем $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$ не все равны нулю; F дифференцируема и в точке M_0 не все F_x', F_y', F_z' равны нулю), находим:

$$F_x'(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\varphi'(t) + F_y'(\ldots)\psi'(t) + F_z'(\ldots)\omega'(t) = 0.$$

Полагая здесь $t = t_0$, получим:

$$F_x'(M_0)\varphi'(t_0) + F_y'(M_0)\psi'(t_0) + F_z'(M_0)\omega'(t_0) = 0. \tag{16}$$

Касательная к линии L в точке M_0 определяется уравнением:

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{17}$$

Введем в рассмотрение прямую, определив ее уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}. \tag{18}$$

Соотношение (16) показывает (см. 4.2, п. 5), что прямые (17), (18) перпендикулярны. Из уравнения (18) видно, что прямая

(18) вполне определяется данной поверхностью (15) и выбранной на этой поверхности точкой M_0, но не зависит от кривой L, которую мы провели на поверхности (15) через точку M_0 произвольно. Следовательно, касательные, проведенные в точке M_0 по всевозможным кривым, лежащим на поверхности (15) и проходящим через точку M_0, перпендикулярны к одной и той же прямой (18) и потому лежат в одной плоскости, которую мы будем называть *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M_0, а прямую (18) — *нормалью* к данной поверхности в точке M_0.

Уравнение этой касательной плоскости как уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной к прямой (18), есть (см. 4.1,п. 2)

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0. \qquad (19)$$

Если поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости будет получено как частный случай уравнения (19) при $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Тогда $F_x' = -f_x'$, $F_y' = -f_y'$, $F_z' = 1$ и уравнение (19) примет вид:

$$z - z_0 - f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Обозначив здесь $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, получим:

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y,$$

или

$$df(x_0, y_0) = \Delta z,$$

т. е. *полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.* Таково геометрическое истолкование полного дифференциала функции $f(x, y)$.

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1; 1; 2)$.

Здесь $z - x^2 - y^2$, $F_x' = -2x$, $F_y' = -2y$, $F_z' = 1$. В точке M_0 имеем $F_x' = F_y' = -2$, $F_z' = 1$. Поэтому согласно формулам (19) и (18) получим уравнение касательной плоскости $2x + 2y - z - 2 = 0$ и уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

11.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут частными производными *второго порядка*. Так, для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами:

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные z''_{xy} и z''_{xz}, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными второго порядка*.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и старших порядков.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$. Имеем:

$$z'_x = e^{x-2y}, \quad z'_y = -2e^{x-2y},$$

$$z''_{x^2} = e^{x-2y}, \quad z''_{xy} = -2e^{x-2y}, \quad z_{xy} = -2e^{x-2y}, \quad z''_{y^2} = 4e^{x-2y}.$$

Здесь $z''_{xy} = z''_{yz}$. Оказывается, имеет место следующая (см., например, [8])

Теорема. *Смешанные производные второго порядка равны, если они непрерывны:* $f'_{xy}(x, y) = f'_{yz}(x, y)$.

Следствие. *Смешанные производные высших порядков равны, если они непрерывны и получены в результате дифференцирования по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но может быть в разной последовательности.*

Покажем это на примере:

$$z'''_{x^2y} = ((z'_x)'_x)'_y = ((z'_x)'_y)'_x = ((z'_y)'_x)'_x,$$

т. е.

$$z'''_{x^2y} = z'''_{xyx} = z'''_{yx^2}.$$

Здесь мы дважды пользовались только что отмеченной теоремой: первый раз применительно к функции z_x (мы изменили порядок ее дифференцирования), второй раз использовали равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$. В общем случае схема рассуждений аналогична.

2. Дифференциалы высших порядков. Заметим прежде всего, что для функции нескольких переменных справедливы те же общие правила дифференцирования, что и для функции одной переменной (8.3, п. 4):

I. $d(u + v) = du + dv(u = u(x, y),\ v = v(x, y))$.

II. $d(uv) = vdu + udv$.

III. $d(Cu) = Cdu(C - \text{const})$.

IV. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} v \neq 0)$.

Например, имеем:

$$d(u+v) = (u+v)_x{}'dx + (u+v)_y{}'dy = u_x{}'dx + v_x{}'dx + u_y{}'dy + v_y{}'dy =$$
$$=(u_x{}'dx + u_y{}'dy) + (v_x{}'dx + v_y{}'dy) = du + dv.$$

Пусть имеется функция $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y, обладающая непрерывными частными производными второго порядка. Рассмотрим ее полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(dx и dy — произвольные приращения), который назовем *полным дифференциалом первого порядка* (или, кратко, *первым дифференциалом*).

Так как $z_x{}'$ и $z_y{}'$ по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим *полный дифференциал второго порядка* (или, кратко, *второй дифференциал*), который обозначается d^2z.

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных произвольных третьего, четвертого, n-го порядков, можно получить полные дифференциалы соответственно третьего. четвертого, n-го порядков.

Найдем выражение для второго дифференциала через частные производные. Пользуясь правилами I, III (dx и dy не зависят от x и y, т. е. рассматриваются как постоянные) и приведенной в п. 1 теоремой, можно записать:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (1)$$

(здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$).

Формула (1) обобщается на случай дифференциала n-го порядка.

3. Формула Тейлора для функции двух переменных. Пусть дана функция $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные всех порядков до $(n + 1)$-го включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0;)$. Пусть точка $M_0(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности. Вспомогательную функцию $F(t)$ определим на отрезке $0 \leq t \leq 1$ равенством

$$F(t) = f(x, y), \qquad (2)$$

где $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$. Согласно формуле Тейлора (см. 8.9, п. 2), имеем:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\Theta t)}{(n+1)!}t^n \quad (0 < \Theta < 1). \qquad (3)$$

Вычислим коэффициенты формулы (3) с помощью равенства (2). При $t = 0$ имеем $F(0) = f(x_0, y_0)$. Дифференцируя сложную функцию $F(t)$ по t, получим:

$$F'(t) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y = df(x, y),$$

$$F''(t) = f''_{x^2}(x, y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(x, y)(\Delta y)^2 =$$

$$= d^2f(x, y),$$

. . . .

$$F^{(n)}(t) = d^n f(x, y),$$

$$F^{(n+1)}(t) = d^{n+1}f(x, y).$$

Заменив в последнем равенстве t на Qt, а в остальных положив $t = 0$, найдем:

$$F^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0) \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$F^{(n+1)}(\Theta t) = d^{n+1}f(x_0 + \Theta t\Delta x, y_0 + \Theta t\Delta y).$$

Если подставить найденные выражения в равенство (3) и затем положить в нем $t = 1$, то получим для $f(x, y)$ *формулу Тейлора*:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Такой же вид формула Тейлора имеет и в случае большего числа переменных.

11.4. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Необходимые условия существования экстремума.

Понятие максимума и минимума можно распространить и на функции нескольких переменных (здесь для случая двух переменных).

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ *максимум* (*минимум*), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0; y_0) > f(x, y)\ (f(x_0; y_0) < f(x, y)),$$

или

$$\Delta z = f(x, y) - (f(x_0; y_0) < 0\ (\Delta z = f(x, y) - (f(x_0; y_0) > 0).$$

Теорема (необходимые условия существования экстремума). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные z_x' и z_y', то*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Из определения экстремума следует, что функция $f(x, y_0)$, рассматриваемая как функция одной переменной x, при $x = x_0$ также имеет экстремум. Поэтому (см. 8.7, п. 2. теорема 1) $f_x'(x_0, y_0) = 0$. Аналогично получаем равенство: $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Примечание. Приведенные условия существования экстремума не являются достаточными, о чем свидетельствует следующий

Пример. $z = x^3 + y^3$, $z_x' = 3x^2$, $z_y' = 3y^2$.

Частные производные равны нулю в точке (0; 0), но экстремума эта функция в точке (0; 0) не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке (0; 0) $z = 0$.

2. Достаточные условия существования экстремума.

Теорема (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция* $f(x, y)$, *непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков, в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0; y_0)$ *удовлетворяет условиям* (1).

Обозначим $A = f''_{x^2}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{y^2}(M_0)$, $D = AC - B^2$. *Тогда в точке* M_0 *функция* $f(x, y)$: 1) *имеет минимум, если* $D > 0$ *и* $A > 0$; 2) *имеет максимум, если* $D > 0$ *и* $A < 0$; 3) *не имеет экстремума, если* $D < 0$.

Доказательство. Ради краткости доказательство приведем для случаев 1 и 2. Согласно формуле Тейлора, взятой для $n = 1$, с учетом условий (1) имеем:

$$\Delta f(x_0 y_0) = \frac{1}{2}(A'(\Delta x)^2 + 2B'\Delta x\Delta y + C'(\Delta y)^2), \tag{2}$$

где

$$A' = f''_{x^2}(M^*), \quad B' = f''_{xy}(M^*), \quad C' = f''_{y^2}(M^*)$$

$$M^*(x_0 + \Theta\Delta x, \quad y_0 + \Theta\Delta y), \quad 0 < \Theta < 1.$$

В силу непрерывности вторых частных производных в точке M_0 следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} = A' = A, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A'C' - (B')^2) = AC - B^2 = D.$$

Поэтому (11.1, п. 6., примечание) для достаточно малых по модулю Δx, Δy, имеем:

$$A' > 0 \text{ (если } A > 0) \tag{3}$$

$$A' < 0 \text{ (если } A < 0) \tag{4}$$

$$A'C' - (B')^2 > 0 \text{ (если } D > 0). \tag{5}$$

В силу неравенств (3) и (4) равенство (2) можно представить в виде:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2A'}((A')^2(\Delta x)^2 + 2A'B'\Delta x\Delta y + A'C'(\Delta y)^2)$$

или, дополняя до полного квадрата, в виде:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2A'}((A'\Delta x + B'\Delta y)^2 + (A'C' - (B')^2)(\Delta y)^2).$$

Выражение во внешних скобках в силу неравенства (5) положительно. Поэтому: 1) если $A > 0$ (а тогда в силу неравенства (3) и

$A' > 0$), то $\Delta f(x_0; y_0) > 0$, и, следовательно, в точке M_0 минимум; 2) если $A < 0$ (а тогда в силу неравенства (4) и $A' < 0$), то $\Delta f(x_0; y_0) < 0$ и, следовательно, в точке M_0 максимум.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Ее частные производные $z_x' = 3x^2 - 3y$, $z_y' = 3y^2 - 3x$ обращаются в нуль в точках $M_0(0; 0)$ и $M_1(1; 1)$. Ее вторые производные равны $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$. В точке M_0 имеем $D = -9 < 0$, следовательно, экстремума в этой точке нет. В точке M_1 $D = 27 > 0$, причем $A = 6 > 0$, следовательно, в точке M_1 минимум.

Примечание. Покажем на примерах, что в случае $D = 0$ экстремум может быть, но его может и не быть.

Пример 2. Функция $z = x^3 + y^3$ в точке (0; 0), где $D = 0$, как показано выше (см. п. 1) экстремума не имеет.

Пример 3. Функция $z = x^4 + y^4$ в точке (0; 0), где $D = 0$, имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки данная функция положительна, в самой точке (0; 0) равна нулю.

11.5. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В естествознании приходится пользоваться *эмпирическими* формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из наилучших методов получения таких формул — это способ наименьших квадратов. Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаем линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты измерений сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	y_2	...	y_n

(1)

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки $(x_k; y_k)$, $k = 1, \ldots, n$, группируются вдоль некоторой прямой линии (рис. 129). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная линейная зависимость, т. е.

$$y = ax + b. \qquad (2)$$

Назовем *уклонением* (или *отклонением*) разность между точным значением функции (2) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы (1): $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений — функция величин a и b:

$$u(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)^2.$$

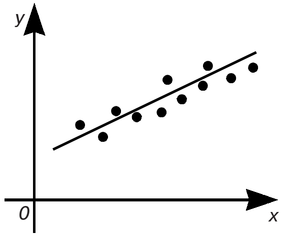


Рис. 129

В методе наименьших квадратов лежит следующий принцип: искомыми значениями a и b являются те, при которых функция $u(a, b)$ имеет минимум.

Для этого (см. 11.4, п. 1) необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial a}=2\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)x_k=2a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2b\sum_{k=1}^{n}x_k-2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=2\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b-y_k)=2a\sum_{k=1}^{n}x_k+2bn-2\sum_{k=1}^{n}y_k=0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k+bn=\sum_{k=1}^{n}y_k. \end{cases} \quad (3)$$

Это окончательный вид так называемой нормальной системы способа наименьших квадратов. Пусть $a=a_0$, $b=b_0$ — решение системы (3). Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине $u(a, b)$ минимум. Функция (2) при $a = a_0$, и $b = b_0$ дает эмпирическую формулу $y = ax_0 + b_0$.

Пример. Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	−2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b. Здесь $n = 5$,

$$\sum_{k=1}^{5}x_k^2=25,\quad \sum_{k=1}^{5}x_k=5,\quad \sum_{k=1}^{5}x_ky_k=16{,}5,\quad \sum_{k=1}^{5}y_k=8,$$

и нормальная система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} 25a+5b=16{,}5, \\ 5a+5b=8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Поэтому $y = 0{,}425\,x + 1{,}175$.

Упражнения

Найти области существования функций

1. $u = 4 - x + 2y$. [Вся плоскость xOy]

2. $u=\dfrac{3}{x^2+y^2}$. [Вся плоскость xOy, кроме точки (0; 0).]

3. $u=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. [I и III квадранты: $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$.]

4. $u = \arccos(x + y)$. [Полоса $-1 \le x + y \le 1$]

5. $u = \ln(x + y) + x - y + 1$. [Полуплоскость $x + y > 0$]

6. $u=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. [Круг $x^2 + y^2 < 4$]

7. $u = \arccos(x^2 + y^2)$. [Круг $x^2 + y^2 \le 1$]

8. $u=\dfrac{xy}{x-y}$. [Вся плоскость xOy, кроме прямой $y = x$]

9. $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. [Вся плоскость xOy, кроме осей Ox и Oy]

10. $u = \ln x \cdot \ln y$. [I квадрант $x > 0$, $y > 0$]

11. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. [I квадрант $x > 0$, $y > 0$]

Найти частные производные первого порядка от следующих функций:

12. $u = x^3 + 3x^2y - y^3$. $[u'_x = 3x^2 + 6xy,\ u'_y = 3x^2 - 3y^2.]$.

13. $u=\sqrt{x+3y}$. $\left[u'_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3y}},\quad u'_y=\dfrac{3}{2\sqrt{x+3y}}.\right]$

14. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. $\left[u'_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2},\quad u'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}.\right]$

15. $u = \operatorname{arctg}(2x - y)$. $\left[u'_x=\dfrac{2}{1+(2x-y)^2},\quad u'_y=\dfrac{-1}{1+(2x-y)^2}.\right]$

16. $u=(1-x)^{y^2}$. $\left[u'_x=-y^2(1-x)^{y^2-1},\quad u'_y=2y(1-x)^{y^2}\ln(1-x).\right]$

17. $u = (1 + xy)^y$. $\left[u'_x=\dfrac{y^2u}{1+xy},\quad u'_y=u\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right].\right]$

18. $u = x^3y^2 + 2x\ln y + x^y$. $\left[u'_x=3x^2y^2+2\ln y+yx^{y-1},\quad u'_y=2x^3y+\dfrac{2x}{y}+x^y\ln x.\right]$

Найти частные производные второго порядка от функций.

19. а) $u = x^3 - 4x^2y + 5y^2$. $\left[u''_{x^2} = 6x - 8y;\ \ u''_{xy} = -8x;\ \ u''_{y^2} = 10.\right]$

б) $u = e^x \ln y$. $\left[u''_{x^2} = e^x \ln y;\ \ u''_{xy} = \dfrac{e^x}{y};\ \ u''_{y^2} = -\dfrac{e^x}{y^2}.\right]$

20. $u = \sin(x + y)$. $\left[u''_{x^2} = u''_{xy} = u''_{y^2} = -\sin(x+y).\right]$

21. $u = x \operatorname{arctg} y$. $\left[u''_{x^2} = 0;\ \ u''_{xy} = \dfrac{1}{1+y^2};\ \ u''_{y^2} = -\dfrac{2xy}{(1+y^2)^2}.\right]$

22. $u = e^{-\frac{y}{x}}$. $\left[u''_{x^2} = \dfrac{y}{x^3}e^{-\frac{y}{x}}\left(\dfrac{y}{x} - 2\right);\ \ u''_{xy} = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right);\ \ u''_{y^2} = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{y}{x}}.\right]$

23. $u = 1 + x + y$. $\left[u''_{x^2} = u''_{xy} = u''_{y^2} = 0.\right]$

Найти указанные частные производные третьего порядка от функций.

24. $u = x^5 + 3y^3 + 2x - y$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ?$ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 60x^2;\ \ \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 18.\right]$

25. $u = \cos(x - y)$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\sin(x - y).\right]$

26. $u = \dfrac{y}{x} + 10$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = ?$ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0;\ \ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{2}{x^3}.\right]$

В следующих упражнениях считать, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, и найти du/dt:

27. $u = ye^x + 1$. $\left[\dfrac{du}{dt} = e^x\left(y\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}\right).\right]$

28. $u = \cos\dfrac{x}{y}$. $\left[\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt}\right).\right]$

29. $u = \ln(4 + x^2 + y^2)$. $\left[\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2}{4 + x^2 + y^2}\left(x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt}\right).\right]$

Найти $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ считая, что $x = x(t,\tau), y = y(t,\tau)$.

30. $u = e^{\frac{y^2}{x}}$. $\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + 2\dfrac{\partial y}{\partial t}\right),\ \ \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{y}{x}e^{\frac{y^2}{x}}\left(-\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial \tau} + 2\dfrac{\partial y}{\partial \tau}\right).\right]$

31. $u = x \operatorname{tg} y$. $\left[\dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{tg} y\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{x}{\cos^2 y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{1}{\cos y}\left(\sin y\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{x}{\cos y}\dfrac{\partial y}{\partial t}\right),\right.$

$$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \tau} = \dfrac{1}{\cos y}\left(\sin y\dfrac{\partial x}{\partial \tau} + \dfrac{x}{\cos y}\dfrac{\partial y}{\partial \tau}\right).\right]$$

Полагая, что рост производительности труда следует линейной зависимости $y = ax + b$, найти по этим данным параметры a и b, применив способ наименьших квадратов.

[$a = 17{,}2$, $b = 217{,}8$.]

Глава 12. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

Задача о массе неоднородной пластины. Пусть плоская область G заполнена веществом с известной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y)$. Найти массу (количество вещества) всей материальной области — «пластины». Под плотностью вещества в точке M понимается предел средней плотности бесконечно малой части G, содержащей точку M. Разобьем область G произвольным образом (рис. 130) на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. Предположим, что в пределах каждой частичной области плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для Δ_k, где $N_k\,(\xi_k; \eta_k)$ — произвольная точка частичной области Δ_k. Тогда масса Δ_k приближенно равна

$$\Delta m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

Для массы всей пластины получим приближенное выражение:

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k. \tag{1}$$

Пусть λ — наибольший из диаметров частичных областей. Заметим, что диаметром области называется наибольшее из расстояний между точками ее границы. Например, диаметр прямоугольника равен его диагонали, диаметр эллипса — его большой оси. Для круга это определение диаметра совпадает с обычным. Сумма (1) будет тем точнее выражать искомую массу m, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Поэтому за массу m естественно принять

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

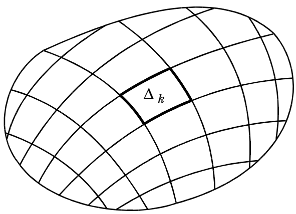


Рис. 130

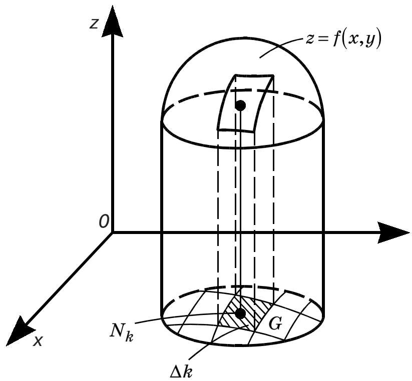


Рис. 131

Примечание. Точно так же, как эта задача, решаются задачи о суммарном заряде, распределенном в области G с заданной плотностью $\rho(M)$, о давлении жидкости на дно сосуда, о количестве световой энергии, падающей на площадку G, и многие другие.

Задача об объеме цилиндроида. Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная и неотрицательная в области G. Найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью G и с боков прямой цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит замкнутый контур, ограничивающий область G (рис. 131). Такое тело для краткости будем называть *цилиндроидом.* В частности, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию, то цилиндроид называется *цилиндром.* Примером цилиндроида служит круговой цилиндр.

Для нахождения объема V данного цилиндроида разобьем область G произвольным образом на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. В каждой из этих частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ выберем произвольную точку $N_k(\xi_k; \eta_k)$ и построим прямой цилиндрический столбик с основанием Δ_k и высотой $f(\xi_k; \eta_k)$. Объем такого столбика равен $f(\xi_k; \eta_k)\Delta w_k$. Сумма объемов этих цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем данного цилиндроида. Следовательно,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

Эта сумма будет тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$. Поэтому за объем V естественно принять

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k,$$

где λ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$.

2. Определение двойного интеграла. Из решения приведенных выше задач (п. 1) видим, что, хотя эти задачи имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k, \tag{2}$$

где $f(x, y)$ — функция, заданная в области G.

Определение. Если существует предел (2), не зависящий от способа разбиения области G на частичные области Δ_k и выбора точек $N_k(\xi_k; \eta_k)$ в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается символом:

$$\iint_G f(x, y) dw = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k. \tag{3}$$

Функция $f(x, y)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области G. При этом $f(x, y)$ называется *подынтегральной функцией, dw — элементом площади, G — областью интегрирования,* x и y — *переменными интегрирования*, сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta w_k$ — *интегральной суммой*.

Примечание. Для двойного интеграла используется также обозначение $\iint_G f(x, y) dx dy$.

Определение. Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная и при переходе от точки к точке положение этой касательной меняется непрерывно. Поэтому кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, будет гладкой, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (тем самым кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

Справедлива следующая теорема (она следует из более общей теоремы, устанавливаемой в полных курсах математического анализа; см., например, [6. т. 2]).

Теорема существования двойного интеграла.

Если область G с кусочно-гладкой границей Γ ограничена и замкнута, а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то эта функция интегрируема в области G.

В дальнейшем будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Из рассмотренных выше задач (п. 1) и определения двойного интеграла следует, что: 1) двойной интеграл (3) с положительной подынтегральной функцией может быть истолкован физически, например, как масса соответствующей пластины; 2) тот же интеграл с неотрицательной подынтегральной функцией может быть истолкован геометрически как объем соответствующего цилиндроида. В частности, двойной интеграл от единичной функции ($f(x, y) \equiv 1$) по области G, т. е. интеграл $\iint\limits_G dw$, численно равен площади области интегрирования $S_G = \iint\limits_G dw$.

3. Свойства двойного интеграла. Эти свойства, как и их доказательства, аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Поэтому приведем их без доказательства.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. Двойной интеграл от суммы двух функций равен сумме двойных интегралов от этих функций.

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. Пусть область G разбита на две области G_1 и G_2. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)dw = \iint\limits_{G_1} f(x, y)dw + \iint\limits_{G_2} f(x, y)dw.$$

4. Если функция $f(x, y) > 0$ в области G, то

$$\iint_G f(x, y)dw > 0.$$

5. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь этой области (теорема о среднем).

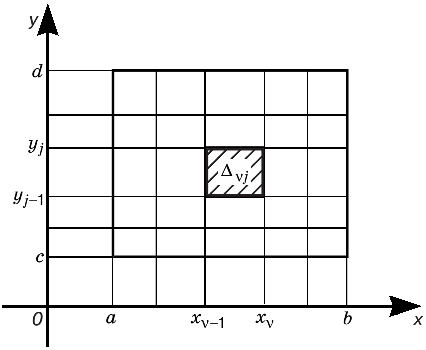


Рис. 132

4. Вычисление двойных интегралов. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint_G f(x, y)dw$.

Случай прямоугольной области. Пусть область G — прямоугольник $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ (кратко $[a, b;\ c, d]$). Разобьем область G на частичные области прямыми, параллельными координатным осям (рис. 132) и проходящими через точки $x_0 = a$, x_1, ..., x_{m-1}, $x_m = b$ оси Ox и точки $y_0 = c$, y_1 ..., y_{p-1}, $y_p = d$ оси Oy. Тогда область G разобьется на прямоугольники, наибольший из диаметров которых обозначим через λ. Пусть $\Delta_{\nu j}$ — прямоугольник, являющийся пересечением ν столбца и j горизонтальной полосы. Площадь его будет $\Delta w_{\nu j} = \Delta x_\nu\ \Delta y_j$, где $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Выберем точку $(\xi_{\nu j};\ \eta_{\nu j}) \in \Delta_{\nu j}$ так, чтобы $\xi_{\nu j} = x_{\nu-1}$, $j = 1, 2, ..., p$. Тогда интегральная сумма будет:

$$\sigma = \sum_{\nu, j} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j})\Delta x_\nu \Delta y_j, \tag{4}$$

где сумма распространена по всем прямоугольникам, т. е. по всем значениям ν и j; $\nu = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., p$.

Сумма вида (4) с двумя индексами суммирования называется *двойной интегральной суммой*. Для ее вычисления можно сначала произвести суммирование по j при фиксированном ν, т. е. сложить слагаемые, отвечающие одному (любому) столбцу, а затем результаты просуммировать по ν. Тогда получим:

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j})\Delta x_\nu \Delta y_j\right) = \sum_{\nu=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j})\Delta y_j\right)\Delta x_\nu.$$

Разумеется, такой переход от двойной суммы к *повторной* можно было бы осуществить и вторым способом: первое, внутреннее, суммирование произвести по ν, а второе, внешнее, — по j.

Используя одно из свойств определенного интеграла (9.7. п. 1, свойство 4) и теорему о среднем (9.7, п. 4), будем иметь:

$$\int_c^d f(x_{\nu-1}, y)dy = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_{\nu-1}, y)dy = \sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j})\Delta y_j.$$

Следовательно,

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \Phi(x_{\nu-1})\Delta x_\nu, \tag{5}$$

где

$$\Phi(x_{\nu-1}) = \int_c^d f(x_{\nu-1}, y)dy. \tag{6}$$

Перейдя в равенстве (5) к пределу при $\lambda \to 0$ (при $\lambda \to 0$ max $\Delta x_\nu \to 0$; как и прежде, λ — наибольший из диаметров частичных областей), будем иметь:

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_a^d \Phi(x)dx,$$

или с учетом равенства (6)

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx. \tag{7}$$

Обычно формулу (7) записывают в виде:

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{8}$$

Выражение, стоящее в правой части последней формулы, называется *повторным интегралом*. Для его вычисления надо последовательно взять два обычных определенных интеграла: сначала *внутренний интеграл*

$$\int_c^d f(x, y)dy,$$

в котором x считается постоянной, а затем полученное выражение (оно зависит от x) проинтегрировать по x от a до b — *внешний интеграл*.

Аналогично при втором способе перехода от двойной интегральной суммы к повторной получили бы:

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx. \tag{9}$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_G (x^2 + y^2)dw,$$

где G — квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

По формуле (8) имеем

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Это же двойной интеграл можно вычислить и по формуле (9).

Случай произвольной области. Пусть теперь G — область на плоскости xOy, изображенная на рис. 133. Тогда вместо интеграла (случай прямоугольной области)

$$\int_c^d f(x_{\mathrm{T}-1}, y)dy$$

будем иметь интеграл:

$$\int_{\varphi_1(x_{\mathrm{T}-1})}^{\varphi_2(x_{\mathrm{T}-1})} f(x_{\mathrm{T}-1}, y)dy.$$

Здесь $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей контура области G, на которые он делится точками A и B. Соответственно и окончательный результат взамен формулы (8) запишется в виде:

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (10)$$

Можно интегрировать и в другом порядке — сначала по x, а затем по y. Тогда получается формула

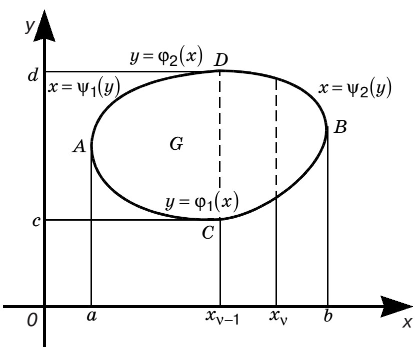


Рис. 133

$$\iint_G f(x, y)dw = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx, \qquad (11)$$

где $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ — уравнения левой и правой частей контура области G (см. рис. 133), на которые он делится точками C и D.

Формулы (10) ((11)) получены при условии, что область G пересекается прямыми, параллельными оси Oy (Ox), не более чем в двух точках. Если это условие нарушено, то область G разбивают на части.

Пример. Найти

$$\iint_G (x+y)dxdy$$

по области G, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$ (рис. 134). Интегрируя сначала по y, а потом по x, получаем:

$$\iint_G (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Проверить результат можно, изменив порядок интегрирования.

5. Двойной интеграл в полярных координатах. Пусть рассматривается двойной интеграл:

$$\iint_G f(x, y)dw,$$

где G — область на плоскости xOy, изображенная на рис. 135. Как известно, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Разобьем область G на частичные области посредством координатных линий полярной системы, т. е. линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ (рис. 135). Выделим частичную область Δw, для которой центральный угол $\Delta\varphi$ и боковая сторона Δr, а радиус, соответствующий нижнему основанию этой области, r (значит, нижнее основание $r\Delta\varphi$). Эту частичную область, представляющую собой криволинейный четырех-

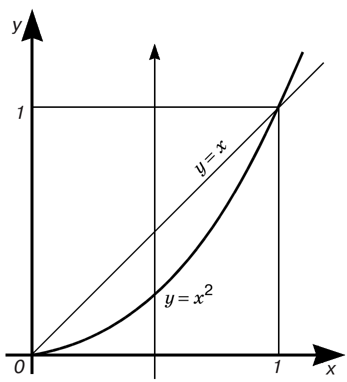


Рис. 134

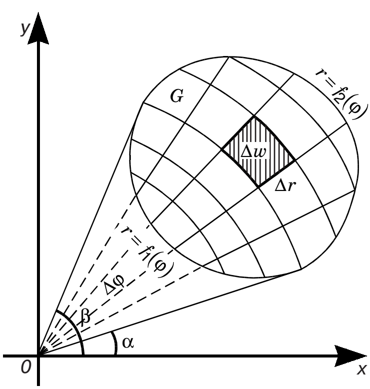


Рис. 135

угольник, можно принять приближенно за прямоугольник со сторонами Δr и $r\Delta\varphi$. (Это замена с точностью до малых высшего порядка, так как площадь криволинейного четырехугольника будет:

$$\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\varphi}{2}-\frac{r^2\Delta\varphi}{2}=r\Delta r\Delta\varphi+\frac{(\Delta r)^2\Delta\varphi}{2}.$$

Тогда $\Delta w = r\Delta r\Delta\varphi$, и мы будем иметь:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_G f(x_k, y_k)\Delta w_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_G f(r_k\cos\varphi_k, r_k\sin\varphi_k,)r_k\Delta r_k\Delta\varphi_k$$

($\sum\limits_G f(x_k, y_k)\Delta w_k$ — интегральная сумма для $f(x, y)$ по области G) или

$$\iint\limits_G f(x, y)dw = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \qquad (12)$$

Переходя к повторному интегралу, получим:

$$\iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi\int_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr, \qquad (13)$$

где смысл пределов интегрирования показан на рис. 135.

Замечание. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержит сумму $x^2 + y^2$, то в большинстве случаев упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах получает весьма простой вид:

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2.$$

Пример. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

где G — первая четверть круга радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 136).

Имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=r.$$

В области G r меняется в пределах от 0 до 1, а φ — от 0 до $\pi/2$. Таким образом, по формулам (12) и (13) получаем:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 dr=\frac{\pi}{2}.$$

6. Интеграл Эйлера-Пуассона. (Симеон Дени Пуассон (1781–1840) — французский математик и физик). Так называется следующий интеграл:

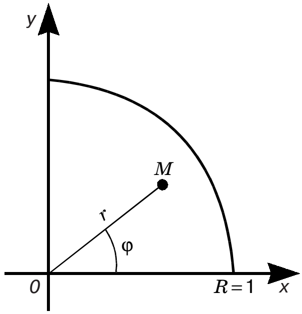


Рис. 136

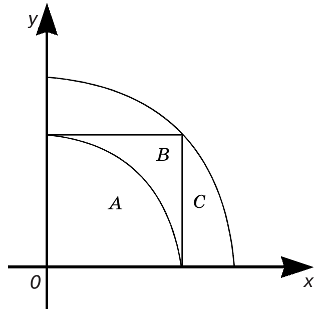


Рис. 137

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx. \qquad (14)$$

Он встречается, например, в теории вероятностей и статистической физике. Докажем, что он сходится, и найдем его величину.

Пусть A — четверть круга радиуса R, B — квадрат со стороной R, содержащий A, и C — четверть круга радиуса $R\sqrt{2}$, содержащая B (рис. 137). Согласно свойствам двойного интеграла имеем:

$$\iint_A e^{-x^2-y^2}dw < \iint_B e^{-x^2-y^2}dw < \iint_C e^{-x^2-y^2}dw. \qquad (15)$$

Интегралы по областям A и C вычислим в полярных координатах:

$$\iint_A e^{-x^2-y^2}dw = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right), \quad \iint_C e^{-x^2-y^2}dw = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Интеграл по области B сведем к квадрату определенного интеграла:

$$\iint_B e^{-x^2-y^2}dw = \int_0^R e^{-x^2}dx \int_0^R e^{-y^2}dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Соотношение (15) теперь примет вид:

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}}<\int_0^R e^{-x^2}dx<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}.$$

Крайние члены этого неравенства при $R \to +\infty$ стремятся к $\sqrt{\pi}/2$. Поэтому, в силу известной теоремы (см. 7.5, п. 1, теорема 5), $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2.$

Следовательно, интеграл (14) сходится, и он равен

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2.$$

7. Вычисление площади кривой поверхности. Пусть σ — участок поверхности $z = f(x, y)$, а область G — его проекция на координатную плоскость xOy (рис. 138). Предположим, что функция $f(x, y)$ и ее первые частные производные непрерывны в G вплоть до границы. Требуется найти площадь S поверхности σ (здесь и в 12.4 так кратко называем участок поверхности).

Разобьем область G на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. В каждой из этих частичных областей Δ_k выберем произвольную точку $N_k(\xi_k; \eta_k)$. Этой точке будет соответствовать на поверхности σ точка $M_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$, где $\theta_k = f(\xi_k; \eta_k)$. Построим в точке M_k касательную плоскость к поверхности σ и нормаль к этой поверхности (рис. 139).

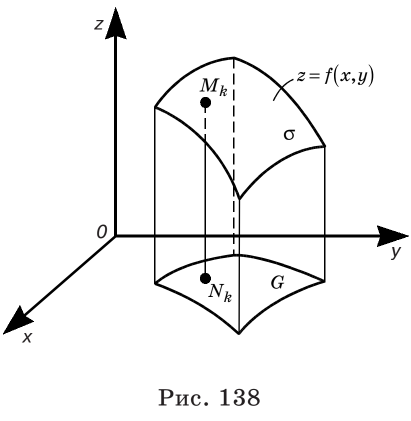


Рис. 138

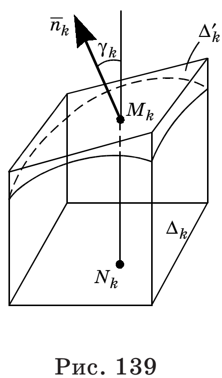


Рис. 139

На касательной плоскости рассмотрим фигуру Δ'_k (площадь ее обозначим через $\Delta w'_k$), которую вырезает из этой плоскости прямой цилиндр с основанием Δ_k. Таким образом, поверхность σ покроется плоскими пластинками Δ'_k, сумма площадей которых дает приближенное значение площади S поверхности σ, т. е.

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta w'_k.$$

Известно, что

$$\Delta w_k = \Delta w'_k \cos\gamma_k$$

(для многоугольников это соотношение доказывается в элементарной геометрии; оно остается верным и для произвольной плоской фигуры; [12, т. II]), или

$$\Delta w'_k = \frac{\Delta w_k}{\cos\gamma_k},$$

где γ_k — острый угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy. Этот угол равен углу между перпендикулярами к ним, т. е. углу между нормалью к поверхности σ в точке M_k и осью Oz. Поэтому (см. 2.2, п. 3; 11.2, п. 5)

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta w'_k = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_y(\xi_k, \eta_k)}\,\Delta w_k,$$

и потому

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta w'_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_k, \eta_k) + f'^2_x(\xi_k, \eta_k)}\,\Delta w_k. \tag{16}$$

По определению, площадью S поверхности σ называется предел последней суммы, когда наибольший из диаметров частичных областей Δ_k стремится к нулю. Так как в правой части равенства (16) стоит интегральная сумма для непрерывной функции

$$\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)},$$

то предел суммы (16) существует, и

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\,dw, \tag{17}$$

Пример. Вычислить площадь поверхности сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Уравнение верхней половины сферы

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

В этом случае

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Учитывая формулу (17), имеем

$$\frac{1}{2}S = \iint_G \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где область интегрирования определяется условием $x^2 + y^2 \le R^2$. Перейдя в этом интеграле к полярным координатам, получим:

$$S = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R\,r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -2R\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\Big|_0^R d\varphi = 2R\int_0^{2\pi} R\,d\varphi = 4\pi R^2.$$

8. Приложения двойного интеграла в механике. Выше (см. п. 1) уже отмечались приложения двойного интеграла в геометрии и некоторых разделах физики, укажем еще на его приложения в механике.

Статические моменты и центр тяжести пластинки. Начнем с вычисления статических моментов рассматривавшейся выше пластинки G (см. п. 1) относительно осей координат. Для этого сосредоточим в точках $N_k(\xi_k; \eta_k)$ массы соответствующих частичных областей и найдем статические моменты полученной системы материальных точек (см. 9.12).

$$M_x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k, \quad M_y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k.$$

Переходя здесь к пределу при обычных условиях, получим подобно случаю, рассмотренному в 9.12,

$$M_x = \iint_G y\rho(x, y)\,dw, \quad M_y = \iint_G x\rho(x, y)\,dw.$$

Наконец, по определению центра тяжести имеем

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

где m — масса пластинки. Отсюда в случае однородной пластинки

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_G x dw, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_G y dw.$$

Пример 1. Найти центр тяжести однородного ($p = 1$) полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Из соображений симметрии заключаем, что $x_c = 0$. Далее имеем:

$$S = \frac{\pi R^2}{2}.$$

$$M_x = \iint_G y dw = \iint_G r^2 \sin\varphi dr d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \int_0^\pi \frac{r^3}{3}\sin\varphi \Big|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = -\frac{R^3}{3}\cos\varphi \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}R^3.$$

Поэтому

$$y_c = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R.$$

Этот же результат был получен ранее (9.12, пример 2) с помощью второй теоремы Гульдена.

Моменты инерции пластины. *Моментом инерции* материальной точки P с массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы на квадрат расстояния от точки P до этой оси.

Метод составления выражений для моментов инерции пластины относительно осей координат такой же, какой применялся для вычисления статических моментов. Поэтому приведем лишь окончательные результаты:

$$J_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dw, \quad J_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dw.$$

Отметим еще, что интеграл $\iint_G xy\rho(x, y)dw$ называется *центробежным моментом инерции* и обозначается J_{xy}.

В механике часто рассматривают *полярный момент инерции* точки, равный произведению массы точки на квадрат расстояния от нее до данной точки — полюса. Полярный момент инерции пластины относительно начала координат будет равен

$$J_0 = \iint_G (x^2 + y^2)\, \rho(x, y) dw = J_x + J_y.$$

Пример 2. Для однородного ($\rho = 1$) полукруга $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$ имеем:

$$J_y = \iint_G x^2 dw = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R (r\cos\varphi)^2 r dr = \frac{1}{8}\pi R^4.$$

12.2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Тройной интеграл является полным аналогом двойного интеграла. Поэтому изложение этого параграфа будем вести по возможности кратко.

1. Задача о массе неоднородного тела. Тройной интеграл. Пусть пространственная (трехмерная) область Ω заполнена веществом с известной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$. Найти массу всей материальной области — «тела». Разобьем область Ω произвольным образом на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, без общих внутренних точек, объемы которых обозначим соответственно $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Предположим, что в пределах каждой частичной области плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для частичной области Δ_k, где $N_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$ — произвольная точка этой частичной области. Тогда масса Δ_k приближенно равна $\rho(\xi_k; \eta_k; \theta_k)\, \Delta v_k$. Для массы всего тела получим приближенное выражение:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k.$$

Эта сумма будет тем точнее выражать искомую массу m, чем меньше будет каждый из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$. (Определение диаметра трехмерной области такое же, как и определение диаметра плоской области (см. 12.1, п. 1).) За массу m естественно принять

$$m \approx \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k, \tag{1}$$

где λ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$.

К вычислению подобного рода пределов приводят и другие задачи. Поэтому будем рассматривать выражение

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k, \tag{1}$$

где $f(x, y, z)$ — функция, заданная в области Ω.

Определение. Если существует предел (1), не зависящий от способа разбиения области Ω на частичные области Δ_k и выбора точек $N_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$ в них, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области Ω и обозначается символом:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta v_k. \tag{2}$$

Функция $f(x, y, z)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области Ω.

Терминология для тройных интегралов аналогична соответствующей терминологии для двойных интегралов. Так же формулируется и теорема существования тройного интеграла.

Из рассмотренной выше задачи о массе неоднородного тела и определения тройного интеграла следует, что тройной интеграл (2) с положительной подынтегральной функцией может быть истолкован *физически* как масса соответствующего тела. В частности, тройной интеграл от единичной функции($f(x, y, z) \equiv \equiv 1$) численно равен объему области интегрирования:

$$\iiint_{\Omega} dv = V_{\Omega}. \tag{3}$$

Свойства двойных интегралов, перечисленные в п. 3 (12.1), полностью переносятся на тройные интегралы. Заметим лишь, что

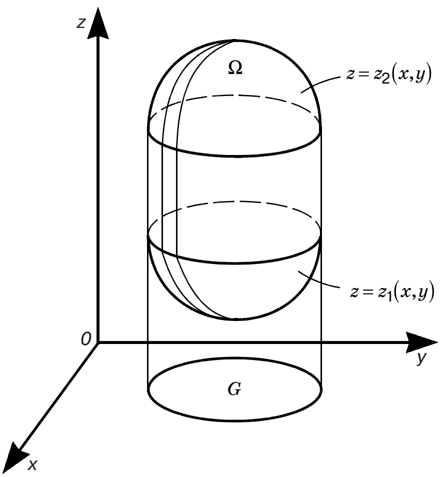


Рис. 140

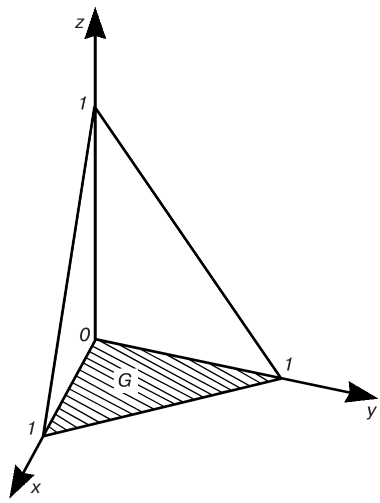


Рис. 141

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)V_{\Omega},$$

где (ξ, η, θ) — некоторая точка области Ω (*теорема о среднем*).

2. Вычисление тройных интегралов. Вычисление тройного интеграла, так же, как и двойного, может быть сведено к ряду однократных интегрирований. Пусть для простоты область Ω есть тело, ограниченное сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис. 140). Тогда, подобно формуле (8) (для двойного интеграла) из 12.1, имеем следующую формулу:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{G}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dw,$$

где G — проекция области Ω на плоскость xOy. Здесь во внутреннем определенном интеграле x и y считаются постоянными. После того, как этот внутренний интеграл будет вычислен, получим выражение, зависящее от x и y. Эту функцию от двух переменных надо затем проинтегрировать по плоской области G. Двойной же интеграл, как установлено в 12.1 (п. 4), сводится к двум определенным интегралам.

Пример. Вычислим тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv,$$

где Ω — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$(рис. 141).

Интегрирование по z совершается от $z = 0$, до $z = 1 - x - y$. Поэтому, обозначая проекцию области Ω на плоскость xOy через G, получим:

$$I = \iint\limits_{G}\left(\int\limits_{0}^{1-x-y}(x+y+z)dz\right)dw = \iint\limits_{G}\left((x+y)z + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dw =$$

$$= \iint\limits_{G}\left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dw.$$

Теперь, учитывая, что G — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, имеем:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x}\left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy = \frac{1}{8}.$$

3. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах. Как и в двумерном случае, для тройных интегралов имеют место формулы преобразования интеграла от прямоугольных координат к новым системам координат. Наиболее употребительные из них цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты. В этой системе координат положение точки M пространства определяется полярными координатами r и φ точки M' — проекции точки M на плоскость xOy — и аппликатой z самой точки M (рис. 142). Числа r, φ и z называются *цилиндрическими координатами* точки M, причем $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и z — любое действительное число. Из рис. 142 видно, что цилиндрические координаты r, φ и z связаны с прямоугольными соотношениями:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Вопрос о преобразовании тройного интеграла к цилиндрическим координатам решается таким же путем, как и преобразование двойного интеграла к полярным координатам. Формула перехода для тройного интеграла от прямоугольных координат к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к трем однократным интегрированиями по z, r, и φ на основании тех же принципов, что и в случае прямоугольных координат.

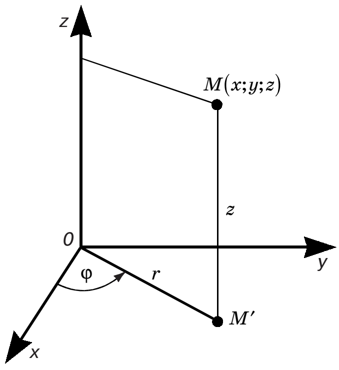


Рис. 142

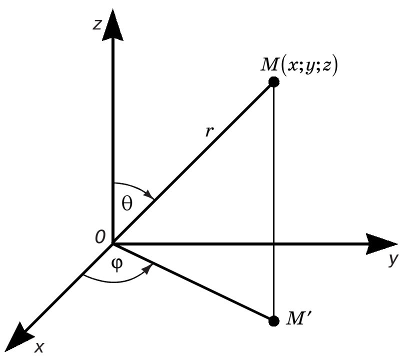


Рис. 143

Пример 1. Найти объем кругового цилиндра высотой H с радиусом основания R.

Используя формулу (3), получим: $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r dr \int\limits_0^H dz = \pi R^2 H.$

Сферические координаты. В этом случае положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием r от начала O, углом φ между положительным направлением оси Ox и проекцией отрезка OM на плоскость xOy, углом θ между положительным направлением оси Oz и отрезком OM (рис. 143). Числа r, φ и θ называются *сферическими координатами* точки M, или полярными координатами в пространстве, при этом $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Из рис. 143 видно, что сферические координаты r, φ и θ связаны с прямоугольными координатами соотношениями:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta.$$

Подобно тому, как была установлена формула перехода в двойном интеграле от прямоугольных координат к полярным, устанавливается формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \qquad (4)$$

Вычисление последнего интеграла также приводится к трем однократным интегрированиям по r, φ и θ.

Если в формуле (4) $f(x, y, z) \equiv 1$, то, в силу (3), получаем формулу для объема тела Ω в сферических координатах:

$$V_{\Omega} = \iiint\limits_{\Omega} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \qquad (5)$$

При этом выражение r^2 sin q drdqdj называется *элементом объема в сферических координатах*.

Пример 2. Найти объем шара радиуса R.

Используя формулу (5), получим: $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$

4. Приложения тройного интеграла в механике. Выше (см. п. 1) уже отмечались применения тройного интеграла в геометрии и физике. Укажем еще на его приложения в механике.

Для вычисления координат центра тяжести тела нужны статические моменты относительно координатных плоскостей

xOy, xOz, yOz (обозначим их соответственно через M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}). Повторяя рассуждения п. 8 (12.1), получим следующие формулы для координат x_c, y_c, z_c центра тяжести тела, занимающего область Ω:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

где

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x\rho dv, \quad M_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y\rho dv, \quad M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\rho dv,$$

m — масса тела, $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность тела.

Отсюда в случае однородного тела

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} x dv, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} y dv, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega} z dv,$$

где V — объем тела.

Пример 1. Найти центр тяжести однородного ($\rho = 1$) полушара Ω:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \quad z \ge 0.$$

В силу симметрии заключаем, что $x_c = y_c = 0$. Далее,

$$m = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad \iiint\limits_{\Omega} z dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Поэтому

$$z_c = \frac{3}{8}R.$$

Перейдем к вычислению моментов инерции тела относительно координатных осей. Так как квадраты расстояний от точки $M(x, y, z)$ до осей Ox, Oy, Oz соответственно равны $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$, то получим следующие формулы:

$$J_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho dv, \quad J_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho dv, \quad J_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho dv.$$

Аналогично плоскому случаю интегралы

$$J_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} xy\rho dv, \quad J_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} yz\rho dv, \quad J_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} zx\rho dv$$

называются *центробежными моментами инерции*.

Для полярного момента инерции формула имеет вид:

$$J_0 = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho dv.$$

Следовательно,

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z.$$

Пример 2. Для однородного ($\rho = 1$) шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ имеем:

$$J_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} r^2 \cdot dr = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

12.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам.

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной линейной плотностью $\rho(M)$, где M — любая точка кривой AB ($\rho(M)$ — предел средней плотности распределения вещества на бесконечно малой дуге, содержащей точку M). Требуется определить массу m дуги AB.

Для решения задачи раздробим дугу AB на n произвольных частей и вычислим приближенно массу каждой части, предполагая, что на каждой из них плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$ для k-й части, где N_k — одна из точек этой части, безразлично какая. Тогда масса k-й части приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\,\Delta l_k$ ($k = 1, 2, \ldots n$), а масса всей дуги приближенно равна

$m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k$, где Δl_k — длина k-й части.

В пределе при $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max \Delta l_k$) получим точное значение массы всей дуги AB, т. е.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta l_k.$$

Задача о площади цилиндрической поверхности.

Пусть в плоскости xOy дана некоторая гладкая кривая AB и на этой кривой определена непрерывная функция $f(M) = f(x, y) \ge 0$. (Непрерывность $f(M)$ вдоль кривой AB означает, что в любой точке M_0 этой кривой $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, где M также точка этой кривой). Тогда точки пространства $(x, y, f(x, y))$ в совокупности составят некоторую кривую, лежащую на цилиндрической поверхности, для которой кривая AB — направляющая, а образующая перпендикулярна к плоскости xOy. Требуется определить площадь части поверхности, которая ограничена сверху кривой $z = f(x, y)$, снизу кривой AB, а с боков прямыми AA' и BB' (рис. 144).

Произвольным образом разобьем дугу AB на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$.

Из каждой точки дробления M_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ проведем перпендикуляры к плоскости xOy высотой $f(M_k)$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок.

Каждую такую полоску заменим прямоугольником с основанием Δl_k, где Δl_k — длина дуги $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и высотой, равной значению функции $f(N_k)$, где N_k — одна из точек дуги $M_{k-1}M_k$, безразлично какая. На рис. 144 в целях его упрощения в качестве такой точки взята точка M_{k-1}. Тогда площадь k-й плоскости будет приближенно равна $S_k \approx f(N_k)\Delta l_k$, а площадь всей поверхности $AA'B'B$

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k.$$

При $\lambda \to 0$ в пределе получим точное значение искомой площади:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k.$$

З а д а ч а о р а б о т е с и л ы. В 9.6 была рассмотрена задача о работе переменной силы при движении материальной точки по прямой линии, причем направление силы совпадало с направлением движения. Сейчас мы рассмотрим более общую задачу.

Пусть материальная точка под действием силы $\overline{F}$ перемещается вдоль непрерывной плоской кривой AB в направлении

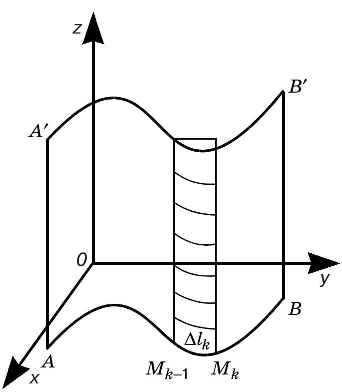


Рис. 144

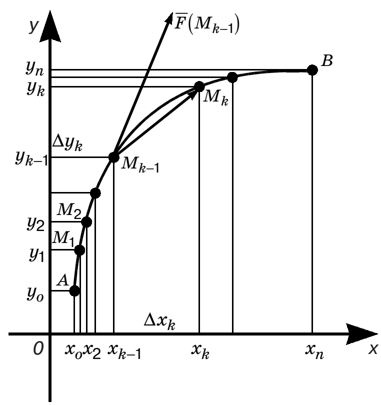


Рис. 145

от A к B. Сила $\overline{F}$ предполагается переменной, зависящей от положения точки на кривой AB. Вычислим работу силы $\overline{F}$, затраченную на перемещение точки из A в B. С этой целью разобьем произвольно точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ дугу AB на n частичных дуг $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ с длинами $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ (рис. 145). Наибольшую из длин Δl_k ($k = 1, 2, \dots, n$) обозначим λ. Ввиду малости Δl_k можно приближенно принять, что: а) вектор силы $\overline{F}$ сохраняет на дуге $M_{k-1}M_k$ постоянное значение, равное $\overline{F}(N_k)$, где N_k — одна из точек элемента $M_{k-1}M_k$ безразлично какая (на рис. 145 в целях его упрощения в качестве такой точки взята точка M_{k-1}); б) дуга $M_{k-1}M_k$ может быть заменена хордой $M_{k-1}M_k$, стягивающей концы этого элемента. Вектор $\overline{M_{k-1}M_k}$ равен приращению радиус-вектора $\bar{r}(M)$: $\Delta\bar{r}_k = \bar{r}(M_k) - \bar{r}(M_{k-1})(\Delta\bar{r}_k(x_k - x_{k-1}; y_k - y_{k-1}))$. Тогда на элементе дуги $M_{k-1}M_k$ работа силы $\overline{F}$ приближенно равна

$$\overline{F}(N_k)\Delta\bar{r}_k.$$

Пусть вектор $\overline{F}(M)$ имеет проекции $P(M)$, $Q(M)$ на соответствующие оси. Тогда работа силы $\overline{F}$ вдоль всей дуги AB будет

приближенно равна $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}(N_k)\Delta\bar{r}_k$,

или

$$\sum_{k=1}^{n}(P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k), \tag{1}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Перейдя в сумме (1) к пределу при $\lambda \to 0$, получим точное выражение работы силы $\overline{F}$ вдоль всей дуги AB:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k). \tag{2}$$

2. Определение криволинейных интегралов, их свойства. Из решения первых двух задач (п. 1) видно, что хотя они имеют различный смысл, но математический аппарат для их решения один и тот же. В этих двух задачах получаем выражение одного и того же вида

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k. \qquad (3)$$

Определение. Если существует предел (3), не зависящий от способа деления дуги AB на частичные дуги и выбора точек N_k, то он называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по дуге AB и обозначается так:

$$\int_{AB} f(M)dl, \quad \text{или} \quad \int_{AB} f(x, y)dl.$$

Дуга AB называется *путем интегрирования*, точка A — *начальной*, а точка B — *конечной* точками интегрирования, сумма $\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k$ — *интегральной суммой*.

Рассмотренные в п. 1 первые две задачи показывают: 1) криволинейный интеграл первого рода при $f(M) \geq 0$ ($f(M)$ на дуге AB непрерывна) численно равен площади участка цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz. Снизу этот участок ограничен дугой AB, а сверху — кривой, изображающей подынтегральную функцию $z = f(M)$. В этом состоит геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода; 2) криволинейный интеграл

$$\int_{AB} \rho(M)dl$$

($\rho(M)$ — линейная плотность) равен массе m материальной дуги AB. В этом состоит его физический смысл. Отсюда следует, что $\int_{AB} dl$ численно равен длине дуги AB.

Хотя, как будет показано в п. 3, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному, между этими понятиями есть и следующее различие. В выражении (3) величины Δl_k обязательно положительны независимо от того, какую точку кривой AB считать начальной, а какую — конечной. Поэтому

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl.$$

Как установлено в п. 1, решение задачи о работе силы сводится к вычислению предела вида (2). К вычислению подобного рода пределов приводят и другие задачи. Поэтому будем рассматривать выражение:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k). \tag{4}$$

(Здесь $P(M)$ и $Q(M)$ — проекции вектор-функции $\bar{a}(M)$, определенной на дуге AB, на оси координат).

Определение. Если существует предел (4), не зависящий от способа деления дуги AB на частичные дуги и выбора точек N_k, то он называется *криволинейным интегралом второго рода от векторной функции* $\bar{a}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j}$ по дуге AB и обозначается символом:

$$\int_{AB} \bar{a}d\bar{r} \quad \text{или} \quad \int_{AB} Pdx + Qdy.$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} (P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k) \tag{5}$$

называется *интегральной суммой*.

Физическое истолкование криволинейного интеграла второго рода, например, как следует из рассмотренной задачи в предыдущем пункте, — это работа силы $\bar{a}(M)$ вдоль дуги AB.

Если $Q(x, y) \equiv 0$ ($P(x, y) \equiv 0$), то интеграл второго рода имеет вид:

$$\int_{AB} P(x, y)dx \quad (\int_{AB} Q(x, y)dy) \tag{6}$$

и называется *криволинейным интегралом по координате* x (y).

В отличие от криволинейного интеграла первого рода криволинейный интеграл второго рода (как непосредственно следует из его определения) зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается кривая AB (кратко L), и меняет знак при изменении направления обхода кривой.

В случае, когда L — замкнутая кривая, т. е. когда точка B совпадает с точкой A, из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L условимся называть *положительным* то, при котором область, лежащая внутри этого контура, остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода контура L условимся называть *отрицательным*.

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, часто обозначают символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Рассмотрим радиус-вектор точки M: $\bar{r}(M) = x\bar{i} + y\bar{j}$. Для общего члена суммы (5) имеем:

$$P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\Delta y_k = \bar{a}(N_k)\Delta\bar{r}_k, \text{ где } \Delta\bar{r}_k = \Delta x_k \cdot \bar{i} + \Delta y_k \cdot \bar{j}.$$

Но $\bar{a}(N_k)\Delta\bar{r}_k = |\bar{a}(N_k)|\,|\Delta\bar{r}_k|\cos(\widehat{\bar{a}, \Delta\bar{r}_k})$. Поэтому $P(N_k)\Delta x_k + Q(N_k)\cdot \Delta y_k = |\bar{a}(N_k)|\,|\Delta\bar{r}_k|\cos(\widehat{\bar{a}, \Delta\bar{r}_k})$. Пользуясь последним соотношением, можно доказать (см. [2]), что имеет место следующая зависимость между криволинейными интегралами первого и второго рода:

$$\int_{AB} \bar{a}(M)d\bar{r} = \int_{AB} a_\tau(M)dl,$$

$\bar{\tau} = \bar{\tau}(M)$ — единичный вектор касательной к дуге AB в точке M и соответствующий направлению дуги от A к B: $a_\tau(M) = |\bar{a}(M)| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{\tau}})$ — проекция вектора $\bar{a}(M)$ на эту касательную.

Так же, как в случае определенных интегралов, из определения криволинейных интегралов двух родов устанавливаются следующие три свойства, общие криволинейным интегралам первого и второго рода.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла.

2. Криволинейный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме криволинейных интегралов от слагаемых.

3. Если путь интегрирования разбит на конечное число частей, то криволинейный интеграл по всему пути равен сумме криволинейных интегралов по всем его частям.

Заметим, что кривая AB может быть и замкнутой.

Справедливо и еще одно свойство, общее для криволинейных интегралов первого и второго рода.

Криволинейный интеграл вдоль замкнутого контура не зависит от выбора начальной точки на этом контуре.

Действительно, если принять за начальную точку A, то, в силу свойства 3 (рис. 146), получим:

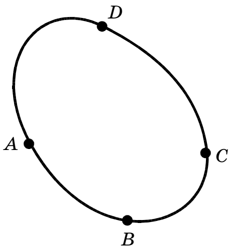


Рис. 146

$$\int\limits_{ABCDA} = \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CDA} \tag{7}$$

(ради краткости здесь и иногда в дальнейшем подынтегральное выражение не пишем).

Если же за начальную точку принять C, то получим:

$$\int\limits_{CDABC} = \int\limits_{CDA} + \int\limits_{ABC}. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int\limits_{ABCDA} = \int\limits_{CDABC}.$$

3. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода. Пусть гладкая дуга AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(\alpha \le x \le \beta)$ и функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены и непрерывны на этой дуге.

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода представим приращение длины дуги Δl_k в виде интеграла (см. 9.11, п. 3, формула (7)) и с помощью теоремы о среднем (9.7, п. 4) получим:

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)}\,\Delta t_k,$$

где среднее значение аргумента t^*_k принадлежит промежутку $[t_{k-1}; t_k]$. Выберем в качестве точки N_k дуги $M_{k-1}M_k$ точку N^*_k, соответствующую значению параметра t^*_k. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k^*)\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k^*), y(t_k^*))\sqrt{x'^2(t^*) + y'^2(t_k^*)}\,\Delta t_k.$$

Правая часть этого равенства есть интегральная сумма для функции $f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ на сегменте $[\alpha; \beta]$ (9.6, п. 2). Поэтому в результате предельного перехода при $\lambda \to 0$ получим:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{9}$$

Эта формула одновременно доказывает существование криволинейного интеграла первого рода от непрерывной функции $f(x, y)$

по гладкой дуге AB, если считать существование определенного интеграла от непрерывной функции известным (см. 9.6, п. 2).

В частности, если дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ на отрезке $[a; b]$ (роль параметра t играет величина x), то, согласно формуле (9),

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (10)$$

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода (6) представим величину Δx_k с помощью формулы Лагранжа (8.6, п. 3) в виде произведения $\Delta x_k = x'(t^*_k)\Delta t_k$, где t^*_k принадлежит интервалу $(t_{k-1}; t_k)$. Выберем в качестве точки N_k дуги $M_{k-1}M_k$ точку N^*_k, соответствующую значению t^*_k. Интегралу (6) соответствует интегральная сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} P(N_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P(x(t_k^*), y(t_k^*)x'(t_k^*)\Delta t_k.$$

Правая часть этого равенства есть вместе с тем интегральная сумма для функции $P(x(t), y(t))\ x'(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ (см. 9.6, п. 2). Поэтому в результате предельного перехода при $\lambda \to 0$ получим:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t))x'(t)dt. \qquad (11)$$

Эта формула одновременно доказывает существование криволинейного интеграла второго рода (6) от непрерывной функции $f(x, y)$ по гладкой дуге AB.

Аналогично выводится формула:

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_\alpha^\beta Q(x(t), y(t))y'(t)dt. \qquad (12)$$

Сложив почленно равенства (11) и (12), получим:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_\alpha^\beta (Px' + Qy')dt. \qquad (13)$$

В частности, если дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ на отрезке $[a; b]$, то аналогично формуле (10) из формулы (13) имеем:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \qquad (14)$$

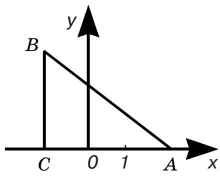


Рис. 147

Пример. 1. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, если плотность в каждой точке равна ее ординате.

Параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$. $x = R\cos t$, $y = R\sin t$.
Следовательно, $x'^2 + y'^2 = R^2$ и в силу формулы (9)

$$m = \int\limits_{AB} \rho dl = \int\limits_{AB} y dl = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin t dl = -R^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

Пример 2. Вычислить работу силы $\bar{F} = 2xy\bar{i} + x\bar{j}$ при перемещении точки M из положения $A(2;\,0)$ в положение $B\,(-1;\,3)$: 1) вдоль прямой AB; 2) вдоль ломаной ACB (рис. 147).

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла

$$I = \int\limits_{AB} 2xydx + xdy.$$

1) Вдоль прямой AB имеем $y = 2 - x$, $dy = -dx$, и потому

$$I = \int\limits_{2}^{-1} (2x(2-x) - x)dx = \frac{3}{2}.$$

2) Вдоль ломаной ACB на участке AC имеем $y = 0$ и $dy = 0$; на участке CB имеем $x = -1$, $dx = 0$. Поэтому

$$I = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = 0 - \int\limits_{0}^{3} dy = -3.$$

В заключение заметим, что мы рассмотрели криволинейные интегралы для плоских кривых. Однако все сказанное о них может быть перенесено и на пространственные кривые.

По аналогии со случаем плоской кривой можно определить криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$$

и криволинейные интегралы второго рода:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx, \quad \int\limits_{AB} Q(x, y, z)dy, \quad \int\limits_{AB} R(x, y, z)dz,$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Техника вычисления таких интегралов, по существу, ничем не отличается от техники вычисления соответствующих интегралов по плоской кривой.

4. Формула Римана — Грина (Георг Риман (1826–1866) — немецкий математик, Джордж Грин (1793–1841) — английский математик и физик).

Пусть функции $P(x, y,)$ $Q(x, y,)$ (кратко P, Q) непрерывны вместе со своими частными производными $P_y{}'$, $Q_x{}'$ в замкнутой области G, граница L которой пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках (для краткости такие области будем называть *простыми*). Предположим, что контур L гладкий или кусочно-гладкий и может быть задан как уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(a \le x \le b)$, так как уравнениями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $(c \le x \le d)$ (рис. 148).

Рассмотрим интеграл:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Представляя его в виде повторного, выполним во внутреннем интеграле по формуле Ньютона-Лейбница (9.7, п. 2) интегрирование по y. Получим:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x, y_2(x))) - P(x, y_1(x)))dx.$$

С другой стороны, используя свойство 3 для криволинейного интеграла (п. 2) и формулу (14), имеем:

$$\oint_L P(x, y)dx = \int_a^b (P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x)))dx.$$

Таким образом,

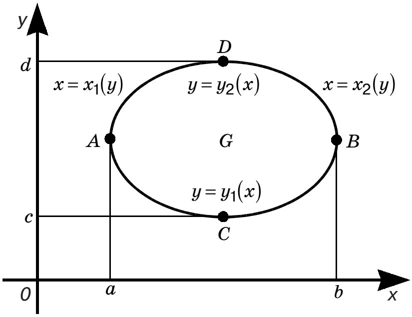


Рис. 148

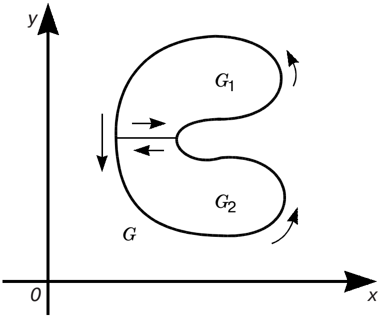


Рис. 149

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_L P(x, y)dx. \qquad (15)$$

Аналогично устанавливается формула:

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x, y)dy. \qquad (16)$$

Вычитая равенство (15) из равенства (16), получим формулу:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad (17)$$

называемую формулой *Римана — Грина*.

Эта формула устанавливает связь между двойным и криволинейным интегралами. Она имеет широкое применение в математическом анализе и его приложениях.

Примечание. Формула Римана—Грина остается справедливой и для замкнутой области G, которую можно разбить на конечное число простых областей проведением дополнительных линий (рис. 149).

Пример. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint(x - y)dx + (x + y)dy$, где L окружность $x^2 + y^2 + = R^2$.

Решение. Функции $P(x, y) = x - y$, $Q(x, y) = x + y$ и $P_y{}' = -1$, $Q_x{}' = 1$ непрерывны в замкнутом круге $x^2 + y^2 = R^2$.

Следовательно, формула (17) применима к данному интегралу. Имеем:

$$\oint\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy = \iint\limits_G [1-(-1)]dxdy = 2\iint\limits_G dxdy = 2\pi R^2.$$

Заметим, что полученный результат легко проверять непосредственно вычислением данного интеграла.

5. Приложения криволинейных интегралов. Ранее (см. п. 2) уже отмечался геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода. Кроме того, криволинейный интеграл первого рода имеет широкое применение в физике. Так (см. п. 2), уже был отмечен физический смысл криволинейного интеграла первого рода. С помощью криволинейного интеграла первого рода можно, как это делалось для двойных интегралов (см. 12.1, п. 8), найти координаты центра тяжести материальной плоской кривой, найти ее моменты инерции относительно координатных осей.

Криволинейные интегралы второго рода так же, как и первого, имеют широкое применение в геометрии, физике, технике. Нами уже была рассмотрена задача о вычислении работы силы (п. 1).

12.4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение поверхностного интеграла первого рода. Задача о массе изогнутой пластины. Пусть на поверхности σ непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(M)$. При этом под плотностью вещества в точке M поверхности σ понимается предел средней плотности на бесконечно малом элементе, содержащем точку M. Требуется определить всю массу материальной поверхности σ.

Разделим поверхность σ (рис. 150) произвольными гладкими линиями на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ без общих внутренних точек с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$; наибольшую из этих площадей обозначим через λ. Предположим, что в каждой части σ_k плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$, где N_k — одна из точек σ_k, безразлично какая. Тогда масса k-го элемента будет приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\,\Delta s_k$. Для массы всей поверхности получим приближенное выражение:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta s_k.$$

За массу материальной поверхности (изогнутой пластины) естественно принять предел полученной суммы при стремлении λ к нулю:

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\Delta s_k.$$

Сформулируем определение поверхностного интеграла первого рода в общем случае. Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ определена на гладкой или кусочно-гладкой поверхности σ. (Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно; поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, которые соединены непрерывно, называется *кусочно-гладкой*). Разделим, как и выше, σ на n частей. Выберем на каждой частичной поверхности произвольную точку N_k и составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta s_k. \qquad (1)$$

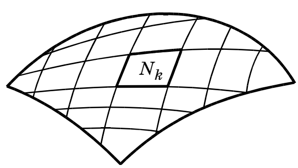


Рис. 150

Определение. Предел интегральной суммы (1) при стремлении λ к нулю (если он существует и не за-

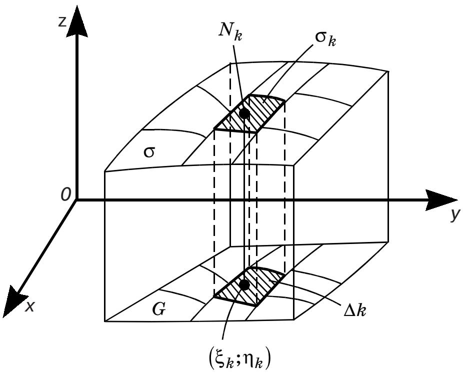


Рис. 151

висит от способа деления σ на частичные поверхности и от выбора точек N_k) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по поверхности σ и обозначается символом

$$\iint\limits_{\sigma} f(M)ds$$

или

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)ds.$$

Его физическое истолкование: например, это масса материальной поверхности с плотностью распределения вещества $f(M)$.

Данное определение, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому теорема существования двойного интеграла и его свойства (12.1, п. 2 и 3) без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы первого рода.

В частности, если на поверхности $\sigma f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iint\limits_{\sigma} ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = S_\sigma \quad (S_\sigma \text{ — площадь поверхности } \sigma).$$

2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода. Пусть поверхность σ задана уравнением $z = z(x, y)$, где функция $z(x, y)$ вместе с производными $z_x'(x, y)$, $z_y'(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G — проекции σ на плоскость xOy, (рис. 151), и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности σ и, следовательно, интегрируема по поверхности σ.

Как и выше (п. 1), разобьем поверхность s произвольно на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ и спроектируем это разбиение на плоскость xOy. Получим соответственно разбиение области G на части $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, площади которых обозначим через Δw_1, $\Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$.

Площадь Δs_k каждой части поверхности может быть представлена в виде (см. 12.1, п. 7):

$$\Delta s_k = \iint\limits_{\Delta_k} \sqrt{1 + z_k'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dw.$$

Применяя здесь теорему о среднем (12.1, п. 3, свойство 5), получим:

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + z_k'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)}\Delta w_k. \qquad (2)$$

Обозначим через N_k точку на k-й части поверхности σ_k с координатами$(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$, где $\theta_k = z(\xi_k; \eta_k)$. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta s_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_k, \eta_k) + z_y'^2(\xi_k, \eta_k)}\Delta w_k.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$ (очевидно $\max \Delta w_k \to 0$), получим (в силу определений двойного и поверхностного интеграла первого рода) формулу:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)ds = \iint_{G} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dxdy. \qquad (3)$$

Аналогично получаются формулы, выражающие поверхностный интеграл первого рода по поверхности σ через двойные по ее проекциям на плоскости yOz и xOz.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, ds,$$

где σ — часть поверхности параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (рис. 152).

Поверхность σ, заданная уравнением $z = 1 - x^2 - y^2$, проектируется на плоскость xOy в область G, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, областью G является круг $x^2 + y^2 \le 1$. В нем функции

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ z_x'(x, y) = -2x,\ z_y'(x, y) = -2y$$

непрерывны. По формуле (3) получаем:

$$I = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \iint_{G} (1 + 4x^2 + 4y^2)dxdy.$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, находим:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4r^2)rdr = 3\pi.$$

3. Определение поверхностного интеграла второго рода. Для того, чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, необходимо сначала ввести понятие стороны поверхности.

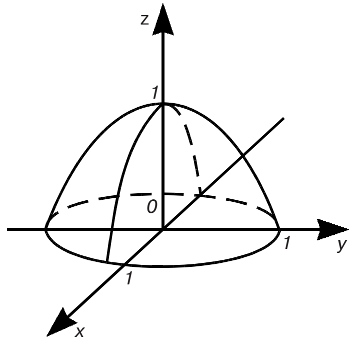


Рис. 152

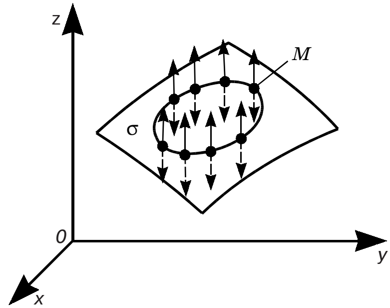


Рис. 153

Возьмем на гладкой поверхности σ произвольную точку M, проведем через нее нормаль к поверхности (вектор $\bar{n}$). Проведем теперь на поверхности σ через точку M какой-нибудь замкнутый контур, не имеющий общих точек с границей поверхности σ, и начнем перемещать точку M по замкнутому контуру так, чтобы вектор $\bar{n}$ все время оставался нормальным к σ и чтобы его направление менялось при этом непрерывно (рис. 153). В прежнее положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с прямо противоположным.

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности σ и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется *двусторонней* (в противном случае — *односторонней*).

Примерами двусторонних поверхностей могут служить плоскость, сфера и т. д.

Мы будем рассматривать лишь двусторонние поверхности.

Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной поверхности*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией поверхности*. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а одностороннюю — *неориентируемой*.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть σ — ориентированная (сторона уже выбрана) поверхность, ограниченная контуром L, не имеющим точек самопересечения. Будем считать *положительным* направление обхода контура L (согласованным с ориентацией σ) то, при движении по которому сама поверхность остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рис. 154). Противоположное направление будем считать *отрицательным.* Если изменить ориентацию поверхности, то положительное и отрицательное направления обхода контура L поменяются ролями.

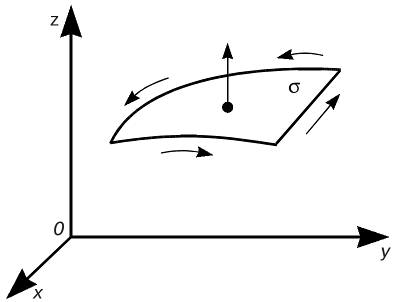


Рис. 154

Задача о потоке жидкости. Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x, y, z)$ задана вектором

$$\bar{v}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k},$$

где P, Q, R — проекции скорости на координатные оси. (В 9.12 рассматривалась векторная функция одного скалярного аргумента.)

Пусть P, Q, R — непрерывные функции координат. Вычислим количество жидкости П, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность σ (в потоке жидкости σ надо мыслить как воображаемую поверхность, не препятствующую течению), ограниченную пространственной кривой L, считая плотность жидкости $\rho = 1$.

Пусть $\bar{n} = \bar{n}(M) = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$ — единичный вектор нормали к поверхности σ в текущей точке M, и пусть его направляющие косинусы являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность σ произвольно на n частей, не имеющих общих внутренних точек с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$, и в каждой из них выберем произвольную точку $M_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$. Подсчитаем количество жидкости $\Delta П_k$, протекающей за единицу времени через k-ю часть поверхности (рис. 155).

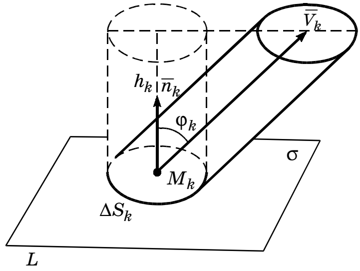


Рис. 155

Обозначим через φ_k угол между векторами $\bar{n}_k = \bar{n}(M_k)$ и $\bar{v}_k = \bar{v}(M_k)$. Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности σ скорость $\bar{v}$ во всех точках k-й части постоянна и равна $\bar{v}(M_k)$, а частичные поверхности плоские. Тогда количество $\Delta\Pi_k$ жидкости, протекающей через k-ю часть за единицу времени в направлении нормали $\bar{n}_k$, приближенно равно объему цилиндра с основанием Δs_k и высотой h_k, равной проекции вектора $\bar{v}_k$ на нормаль $\bar{n}_k$, т. е. $\Delta\Pi_k \approx \Delta s_k \cdot h_k$. А так как

$$h_k = |\bar{v}_k| \cos \varphi_k = |\bar{v}_k| \, |\bar{n}_k| \cos \varphi_k = \\ = (\bar{v}_k, \bar{n}_k),$$

то

$$\Delta\Pi_k \approx (\bar{v}_k, \bar{n}_k)\Delta s_k.$$

Для количества жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени, получим приближенное выражение:

$$\prod = \sum_{k=1}^{n} \Delta \prod{}_k \approx \prod{}_n, \quad \text{где} \quad \prod{}_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}_k, \bar{n}_k)\Delta s_k$$

или

$$\prod{}_k = \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k)\Delta s_k. \tag{4}$$

Точное значение этого количества получаем при переходе к пределу в (4) при $\lambda \to 0$, где λ — наибольший из диаметров частей поверхности σ:

$$\prod = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k)\Delta s_k. \tag{5}$$

Преобразуем сумму (4). Пусть $(\Delta w_k)_{yz}$ — площадь проекции k-й части поверхности на плоскость yOz, взятая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, образует нормаль $\bar{n}_k$ с осью Ox острый или тупой угол. Имеем (см. 12.1, п. 7):

$$(\Delta w_k)_{yz} = \Delta s_k \cos \alpha_k. \tag{6}$$

Аналогично

$$(\Delta w_k)_{xz} = \Delta s_k \cos \beta_k \tag{7}$$

$$(\Delta w_k)_{xy} = \Delta s_k \cos \gamma_k. \tag{8}$$

С учетом равенств (6), (7) (8) сумма (4) и предел (5) принимают соответственно вид:

$$\prod{}_n = \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)(\Delta w_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}), \tag{9}$$

$$\prod = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)(\Delta w_k)_{yz} + Q(M_k)(\Delta w_k)_{xz} + R(M_k)(\Delta w_k)_{xy}). \tag{10}$$

Примечание. Отметим, что пределы в правых частях равенств (5) и (10) равны (предполагается, что эти пределы существуют), так как формулы (4) и (9) выражают одну и ту же сумму, но записанную в разных формах.

Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла второго рода.

Пусть σ — некоторая ориентируемая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, и пусть $R(x, y, z)$ — функция, определенная в точках поверхности σ. Выберем одну из двух сторон поверхности, т. е. выберем одно из двух возможных направлений векторов нормали в точках поверхности (тем самым мы ориентировали поверхность). Если векторы нормалей составляют острые углы с осью Oz, то будем говорить, что выбрана *верхняя сторона* поверхности $z = f(x, y)$, если тупые углы, то *нижняя сторона* поверхности. Разобьем поверхность σ произвольно на n частей, не имеющих общих внутренних точек. Обозначим через Δ_k проекцию k-й части поверхности на плоскость xOy. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $M_k(\xi_k; \eta_k; \theta_k)$, составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta w_k, \tag{11}$$

где Δw_k — площадь Δ_k, взятая со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности σ, и со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона поверхности σ.

Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности σ и дадим следующее.

Определение. Предел интегральной суммы (11) при $\lambda \to 0$ (если он существует и не зависит от способа деления σ на частичные поверхности и выбора точек N_k) называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности σ и обозначается одним из символов:

$$\iint_{\sigma} R(M)dxdy \quad \text{или} \quad \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy.$$

Аналогичным образом определяется поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz \quad (\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dzdx).$$

Сумму

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z)dzdx + \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy.$$

принято называть *общим поверхностным интегралом второго рода* и обозначать символом:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \qquad (12)$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает всеми свойствами поверхностного интеграла первого рода, за исключением одного: при изменении стороны поверхности (переориентации) интеграл меняет знак.

Из рассмотренной выше задачи о потоке жидкости следует (см. (10)), что в этой задаче поверхностный интеграл (12) может быть истолкован физически как количество жидкости, протекающее за единицу времени через указанную в этой задаче поверхность σ.

4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода. Пусть ориентированная (выберем верхнюю сторону) гладкая поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция, определенная в замкнутой области G — проекции поверхности σ на плоскость xOy, а $R(x, y, z)$ — непрерывная функция на поверхности σ.

Разобьем произвольно поверхность σ на n частей, не имеющих общих внутренних точек, и спроектируем это разбиение на плоскость xOy (рис. 156).

Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta w_k$, где Δw_k — площадь Δ_k.

Так как $\theta_k = f(\xi_k; \eta_k)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta w_k = \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))\Delta w_k. \qquad (13)$$

В правой части равенства (13) стоит интегральная сумма для двойного интеграла от непрерывной в области G функции $R(x, y, f(x, y))$. Переходя к пределу в (13) при $\lambda \to 0$, получаем:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{G} R(x,y,f(x,y))dxdy. \qquad (14)$$

Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то перед интегралом в правой части (14) появится знак «минус».

Аналогично вычисляются интегралы:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz \quad \iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dzdx.$$

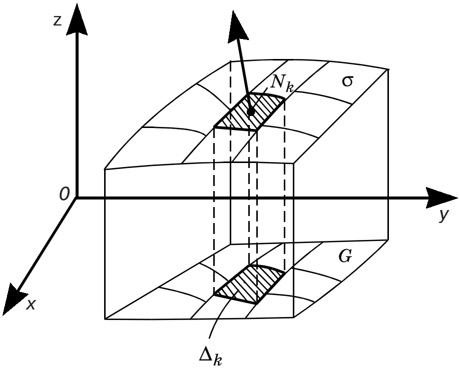


Рис. 156

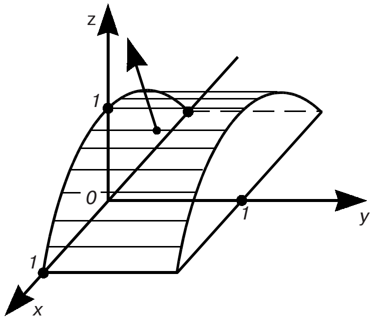


Рис. 157

Для вычисления интеграла общего вида (12) используются формулы указанных трех интегралов, если поверхность σ однозначно проектируется на все три координатные плоскости.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_\sigma (y^2 + z^2)dxdy,$$

где σ — верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y = 0$, $y = 1$ (рис. 157).

Проекцией данной поверхности на плоскость xOy является прямоугольник G: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. По формуле (14) находим:

$$\iint_\sigma (y^2 + z^2)dxdy = \iint_G (y^2 + (\sqrt{1-x^2})^2)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (y^2 + 1 - x^2)dy = 2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_\sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$, где σ — верхняя сторона части плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = 4$ и лежащей в первом октанте (рис. 158).

Так как плоскость s параллельна оси Oy, то $\iint_\sigma ydzdx = 0.$ Поэтому

$$\iint_\sigma xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{G_1} (1-z)dydz + \iint_{G_2} (1-x)dxdy =$$

$$= \int_0^4 dy \int_0^1 (1-z)dz + \int_0^4 dy \int_0^1 (1-x)dx = 2 + 2 = 4.$$

5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Из примечания, отмеченного в п. 3, и определений поверхностных интегралов первого и второго рода следует, что

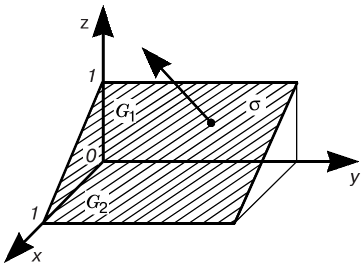


Рис. 158

$$\iint_\sigma (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta +$$
$$+R(x,y,z)\cos\gamma)ds =$$
$$=\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx +$$
$$+R(x,y,z)dxdy. \qquad (15)$$

6. Приложения поверхностных интегралов. Ранее (см. п. 1,3) уже отмечался физический смысл поверхностных интегралов первого и второго рода, а также была получена (п. 1) формула для площади поверхности через поверхностный интеграл первого рода. С помощью поверхностного интеграла первого рода можно, как это делалось для двойных интегралов (12.1, п. 8), найти координаты центра тяжести материальной поверхности, найти ее моменты инерции относительно координатных осей.

Глава 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

13.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. В различных областях науки и техники встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные искомых функций. Эти уравнения называются *дифференциальными*. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0; 0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x; f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \qquad (1)$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$. Следовательно,

$$y = \int 2x dx$$

или

$$y = x^2 + C, \qquad (2)$$

где C — произвольная постоянная.

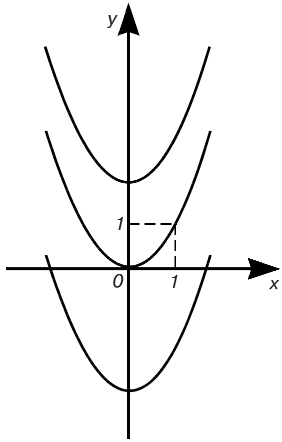


Рис. 159

Из формулы (2) следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, т. е. уравнению (1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (рис. 159). Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0; 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2). Поэтому $0 = 0 + C$, т. е. $C = 0$. Значит, искомая кривая будет $y = x^2$.

Задача 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t = 0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой $v = gt$.

Решение. Как уже отмечалось (см. 8.1, п. 2), скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени.

Поэтому

$$v = \frac{ds}{dt} = gt.$$

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,

$$s = \int gt dt$$

или

$$s = \frac{gt^2}{2} + C. \qquad (4)$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. при $t = 0$ $s = 0$. Подставляя эти значения в равенство (4), находим: $0 = 0 + C$, т. е. $C = 0$, и, следовательно, окончательно получаем:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $dy/dx = \varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и технические процессы описываются гораздо общими и сложными дифференциальными уравнениями.

2. Определение дифференциального уравнения, его порядок и решение. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. В этой главе мы будем заниматься только обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного уравнения. Следовательно, общий вид дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{5}$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Например, уравнения $y' - y/x = x$, $y'' + y' = 1$ имеют соответственно первый и второй порядок.

Всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (5), обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Пример. Функция $y = e^{x^3/3}$ является решением уравнения $y' - x^2y = 0$, так как она обращает это уравнение в тождество.

13.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЭКОЛОГИИ

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, его геометрическое истолкование, общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид:

$$F(x, y, y') = 0,$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y') вид:

$$y' = f(x, y). \qquad (1)$$

Будем рассматривать в уравнении (1) переменные x и y как прямоугольные координаты точки на плоскости xOy. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1); тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (1). Рассмотрим касательную к интегральной кривой в произвольной точке $M(x; y)$. Согласно геометрическому смыслу производной в этой точке, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол наклона этой касательной к оси Ox. Из последнего равенства и из (1) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y),$$

где x, y — координаты точки M. Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части уравнения (1). Итак, уравнение (1) определяет в каждой точке интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Каждой точке $M(x; y)$ той области, где определена функция $f(x, y)$ (правая часть уравнения (1)), сопоставим отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$, где (x, y) — это координаты точки M. Мы получаем совокупность направлений, или, как говорят, поле направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнению (1) соответствует его поле направлений. В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (1). Проведя указанные выше отрезки для достаточно большого числа точек области, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу решения (интегрирования) уравнения (1) геометрически можно истолковать следующим образом: найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрировать на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральной кривой служит одна из магнитных силовых линий.

В задачах, приводящих к дифференциальным уравнениям, точнее в их решения (см. (2) и (4) 13.1), входит произвольная постоянная C. Такие решения называются общими решениями этих уравнений. Аналогично решение уравнения (1), содержащее произвольную постоянную C, т. е. имеющее вид:

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

называется *общим решением* этого уравнения. Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$. В этом случае соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ (или $\psi(x, y) = C$) называется *общим интегралом* уравнения (1).

Решить, или *проинтегрировать*, данное дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение в той или иной форме.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется *частным решением*. Например, функции $y = x^2$, $s = gt^2/2$ — частные решения соответственно уравнений (1), (3), рассмотренных в 13.1.

Для уравнения (1) справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (1):

Теорема. *Если в уравнении* (1) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $f_y'(x, y)$ *непрерывны в некоторой области* D *на плоскости* xOy, *содержащей некоторую точку* (x_0, y_0), *то существует единственное решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее условию: при* $x = x_0$, $y = y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует и притом единственная, функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0). (Доказательство ее выходит за рамки настоящей книги (читатель может найти его, например, в книге [9].)

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения (2) частное решение.

2. Уравнения с разделяющимися переменными. Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{или} \quad dy = f(x, y)dx.$$

Такому уравнению можно придать следующую форму:

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0 \qquad (3)$$

Форма (3) удобна тем, что здесь переменные x и y равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Предположим, что функции $M(x; y)$ и $N(x; y)$ можно представить произведениями

$$M(x; y) = M_1(x)M_2(y),\ N(x; y) = N_1(x)N_2(y),$$

в которых сомножители зависят только от одной переменной. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде:

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (4)$$

откуда, деля почленно на произведение $M_2(y)N_1(x)$ (предполагаем, что оно не равно нулю), имеем:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0. \qquad (5)$$

Заметим, что в уравнении (5) множитель перед dx — функция только одной переменной x, а множитель перед dy — функция только одной переменной y.

Уравнение (5) называется *уравнением с разделенными переменными*, а уравнение (4) — *уравнением с разделяющимися переменными*. Итак, уравнение с разделяющимися переменными (4) сводится к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей уравнения (4) на произведение $M_2(y)N_1(x)$. Эта операция называется *разделением* переменных.

Покажем, что соотношение

$$F(x, y) = C, \qquad (6)$$

где

$$F(x, y) = \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy,$$

есть общий интеграл уравнения (5) и уравнения (4). Действительно, пусть $y = \varphi(x, C)$ (или, кратко, $y = \varphi$) — функция, определяемая уравнением (6). Тогда имеем тождество:

$$F(x, \varphi) \equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x, получим тождество:

$$F'_x(x, \varphi) + F'_y(x, \varphi)\varphi' \equiv 0, \quad \text{или} \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy \equiv 0.$$

Следовательно, функция $y = \varphi(x, C)$ оказывается общим (поскольку зависит от C) решением уравнения (5), а следовательно, и уравнения (4). Значит, соотношение (6) или соотношение

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C$$

есть общий интеграл уравнения (5) и уравнения (4).

Примечание. В общем случае, деля на произведение $M_2(y)N_1(x)$, мы рискуем потерять те решения уравнения (4), которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $y = b$, где b — корень уравнения $M_2(y) = 0$, есть решение уравнения (4). Аналогично функция $x = a$, где a — корень уравнения $N_1(x) = 0$, также является решением уравнения (4).

Пример 1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Интегрируя, находим: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2 + y^2 = C^2$. Это уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 160) с центром в начале координат и радиусом C.

Пример 2. Решить уравнение $xdy = ydx$. Разделяя переменные, получим: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь:

$$\ln y = \ln x + \ln C. \qquad (7)$$

Строго говоря, мы должны писать $\ln |y| = \ln |x| + \ln C$, где $C > 0$. Однако допущенная в (7) вольность не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

В равенстве (7) произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, так как всякое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1 = \ln C$, где $C = e^{C_1}$.

Потенцируя равенство (7), получим общее решение данного дифференциального уравнения: $y = Cx$. Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 161).

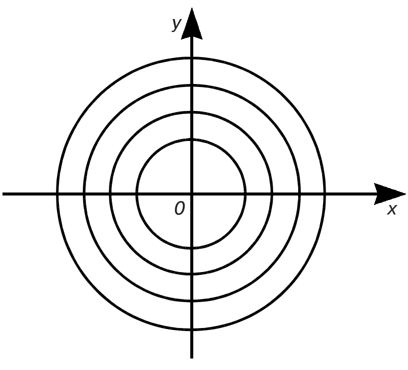


Рис. 160

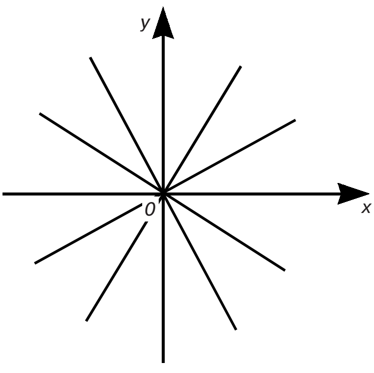


Рис. 161

3. Однородные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* измерения m, если имеет место тождество:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Пример 1. Функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ является однородной функцией измерения 2, так как $(tx)^2 + 2(ty)^2 - (txty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy)$.

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения.

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (8)$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, если функция $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Можно показать, что с помощью подстановки $y = ux$, где u — новая искомая функция от x, однородное уравнение (8) легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Заметим, что $dy = udx + xdu$.

Иногда целесообразно вместо подстановки $y = ux$ использовать подстановки $x = uy$.

Пример 2. Решить уравнение $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$. Применяя подстановку $y = ux$, имеем: $(u^2x^2 - 3x^2)dx + 2x^2u(udx + xdu) = 0$, откуда $3(u^2 - 1)dx + 2xudu = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{3}{x}dx + \frac{2udu}{u^2 - 1} = 0, \quad 3\ln x + \ln(u^2 - 1) = \ln C,$$

что после потенцирования дает равенство $x^3(u^2 - 1) = C$. Так как $u = y/x$, то $x^3\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$ и общий интеграл имеет вид: $x(y^2 - x^2) = C$. Используя начальное условие, имеем: $C = 0$. Поэтому искомыми частными решениями являются $y = \pm x$.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение

$$y' + py = q, \qquad (9)$$

где $p = p(x)$ и $q = q(x)$ — заданные непрерывные в интервале $(a; b)$ функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Для решения уравнения (9) применим подстановку $y = uv$, причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v = v(x)$ мы выбираем произвольно. Эта подстановка дает $u'v + uv' + puv = q$, или $v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + pv\right)u = q$. Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию $\frac{dv}{dx} + pv = 0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dv}{v}=-pdx, \quad \ln v=-\int pdx,$$

откуда

$$v=e^{-\int pdx}.$$

Поэтому имеем уравнение:

$$e^{-\int pdx}\frac{du}{dx}=q.$$

Решая его, получаем:

$$u=C+\int qe^{\int pdx}dx.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение уравнения (9):

$$y=e^{-\int pdx}(C+\int qe^{\int pdx}dx). \tag{10}$$

Примечание. Если в уравнении (9) $q(x)\equiv 0$, то оно называется *линейным однородным уравнением первого порядка*, в противном случае — *линейные неоднородным уравнением первого порядка*. Следовательно, линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид:

$$y' + py = 0. \tag{11}$$

Из формулы (10) следует формула общего решения уравнения (11):

$$y=Ce^{-\int pdx}.$$

Пример. Решить уравнение $y'-\frac{y}{x}=x.$

Согласно формуле (10), имеем:

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}(C+\int xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx)=e^{\ln x}(C+\int xe^{-\ln x}dx)=x(C+\int dx)=Cx+x^2.$$

5. Задачи из физики, техники и экологии.

Задача о законе движения. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением $v\cos t + s\sin t = 1$. Найти закон движения, если при $t = 0$ $s = 2$.

Решение. Так как $v = ds/dt$, то, подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{ds}{dt}\cos t+s\sin t=1$$

или

$$\frac{ds}{dt}+s\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}.$$

Теперь, согласно формуле (10), имеем:

$$s = e^{-\int \frac{\sin t}{\cos t} dt} \left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{\int \frac{\sin t}{\cos t} dt} dt \right) =$$

$$= e^{\int \frac{d \cos t}{\cos t}} \left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\int \frac{d \cos t}{\cos t}} dt \right) = e^{\ln \cos t} \left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\ln \cos t} dt \right) =$$

$$= \cos t \cdot \left(C + \int \frac{dt}{\cos^2 t} \right) = \cos t \cdot (C + \operatorname{tg} t) = C \cos t + \sin t.$$

По условию при $t = 0$ $s = 2$ и потому $C = 2$. Таким образом, искомый закон движения $s = \sin t + 2\cos t$.

Задача о заряде конденсатора. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. Сила I электрического тока представляет производную от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $I = dq/dt$; в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора q/Q, т. е.

$$E = U - \frac{q}{Q}.$$

Согласно закону Ома

$$I = \frac{E}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{Q}}{R}.$$

Отсюда

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}.$$

Теперь, согласно формуле (10), имеем:

$$q = e^{-\int \frac{dt}{QR}} \left(C + \int \frac{U}{R} e^{\int \frac{dt}{QR}} dt \right) = e^{-\frac{t}{QR}} \left(C + \frac{U}{R} \int e^{\frac{t}{QR}} dt \right) =$$

$$= e^{-\frac{t}{QR}} \left(C + \frac{UQR}{R} e^{\frac{t}{QR}} dt \right) = Ce^{-\frac{t}{QR}} + UQ.$$

По условию при $t = 0$ $q = 0$, и потому $0 = C + UQ$ и $C = -UQ$. Таким образом, в момент времени t $q = UQ(1 - e^{-t/QR})$.

Задача о радиоактивном распаде. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t = 0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \qquad (12)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя в уравнении (12) переменные и затем интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = -kdt,$$

$$\text{In } x = -k\ t + \text{In } C,$$

что после потенцирования дает:

$$x = Ce^{-kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = m_0$. Имеем $C = m_0$, и, значит,

$$x = m_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 1590 x = m_0/2$. Имеем:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k} \quad \text{или} \quad e^{1590k} = 2,$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/1590}$. Поэтому искомая функция

$$x = m_0 2^{-t/1590}.$$

Задача об охлаждении тела. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20°С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60°С. Определить закон изменения температуры Θ тела в зависимости от времени t.

Решение. Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{d\Theta}{dt} = k(\Theta - 20),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\Theta}{\Theta - 20} = kdt,$$

$$\text{In}(\Theta - 20) = kt + \text{In}C,$$

что после потенцирования дает

$$\Theta - 20 = Ce^{kt}$$

и, следовательно,

$$\Theta = 20 + Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $\Theta = 100$. Отсюда: $C = 80$. Поэтому

$$\Theta = 20 + 80e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 20$ Q $= 60$. Отсюда

$$60 = 20 + 80\, e^{20k} \quad \text{или} \quad e^{20k} = 1/2$$

и, следовательно,

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Итак, искомая функция

$$\Theta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Задача о прожекторе. Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения и обладающего тем свойством, что все лучи, выходящие из источника света, помещенного в точке O на оси вращения, отражаются зеркалом параллельно этой оси.

Решение. Для решения задачи рассмотрим плоское сечение зеркала, проходящее через ось вращения. Поместим источник света в начале координат, и пусть ось вращения совпадает с осью Ox (рис. 162). Обозначим через а угол, образованный осью Ox и касательной AS в произвольной точке сечения $M(x; y)$. Наша цель — найти форму сечения, т. е. зависимость координаты y от координаты x $y = y(x)$. Ломаная OMT изображает путь луча, исходящего из источника света в точке O и отражающегося в точке M от поверхности зеркала параллельно оси Ox. Проведем нормаль MN и опустим из точки M на ось Ox перпендикуляр MP. Так как $\angle AMO = \angle TMS$ (угол падения равен углу отражения), то $\angle OMN = \angle NMT = \angle ONM$. Следовательно, ΔNOM равнобедренный и $OM = ON$. Кроме того, по построению $\angle PNM = \alpha$. Используя равенства $ON = PN - PO$, $PN = y$ tg a, $PO = -x$, $ON = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, приходим к соотношению

$$ON = y\operatorname{tg}\alpha + x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда, учитывая геометрический смысл производной, для определения зависимости y от x получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x + \frac{dy}{dx}y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом. Умножим обе его части на $2dx$:

$$2xdx + 2ydy = 2\sqrt{x^2 + y^2}\,dx \quad \text{или} \quad d(x^2 + y^2) = 2\sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

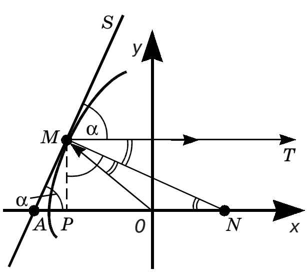


Рис. 162

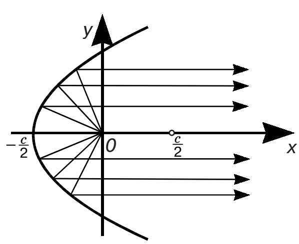


Рис. 163

Используя подстановку $z = x^2 + y^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$dz = 2\sqrt{z}dx,$$

которое можно преобразовать к виду:

$$z^{-1/2}dz = 2dx, \text{ откуда } \sqrt{z} = x + C.$$

Заменяя переменную z ее выражением через x и y, получаем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем:

$$y^2 = 2C(x + C/2).$$

Таким образом, искомая кривая — парабола с параметром $p = C$ и вершиной, лежащей на отрицательной полуоси Ox на расстоянии $C/2$ от начала координат (рис. 163). Следовательно, искомая отражательная поверхность — *параболоид вращения*.

Задача о концентрации раствора. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t, $-dx$ — количество соли, выходящее из резервуара за время dt (знак минус обусловлен тем, что x — убывающая функция времени). Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен:

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t,$$

поэтому концентрация соли (т. е. количество соли, содержащейся в одном литре смеси) в момент времени t будет равна

$$\frac{x}{100 + 10t}.$$

Следовательно, за короткий промежуток времени dt количество соли уменьшится на

$$\frac{x}{100 + 10t} \cdot 20dt.$$

Отсюда имеем дифференциальное уравнение:

$$-dx = \frac{20xdt}{100 + 10t},$$

или

$$-dt = \frac{2xdt}{10+t}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10+t},$$

$$\ln x = -2\ln(10 + t) + \ln C$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

При $t = 0$ $x = 10$. Поэтому $C = 1000$. Итак, закон изменения количества соли в кг, находящейся в резервуаре, в зависимости от прошедшего времени t в мин дается формулой:

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}.$$

Заметим, что из последней формулы, зная количество соли, оставшейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

Задача о законе «естественного роста». Закон «естественного роста» — это закон, при котором скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества x в зависимости от времени t, считая, что в начальный момент при $t = 0$ количество вещества было x_0.

Р е ш е н и е. Используя физический смысл производной, можно записать закон «естественного роста» следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{13}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Уравнение (13) (оно отличается от уравнения (12) лишь знаком левой части) описывает многие процессы «размножения».

Решение уравнения (13), удовлетворяющее начальному условию $x = x_0$ при $t = 0$, имеет вид:

$$x = x_0 e^{kt}. \tag{14}$$

Формула (14) является формулой, выражающей закон «естественного роста». По этому закону, например, происходит «размножение» числа нейтронов в ядерных реакциях, размножение числа бактерий, рост кристаллов, населения и т. п.

Задача о скорости размножения бактерий. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x - количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Как и при решении уравнения (12), находим:

$$x = Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = 100$. Имеем $C = 100$, и, значит,

$$x = 100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t = 3$ $x = 200$. Имеем:

$$200 = 100e^{3k} \quad \text{или} \quad 2 = e^{3k},$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/3}$. Поэтому искомая функция

$$x = 100 \cdot 2^{t/3},$$

откуда при $t = 9$ $x = 800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз.

13.3. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Основные понятия. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка есть:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ может не зависеть от некоторых из величин $x, y, y', ...,$ Однако если (1) есть уравнение именно n-го порядка, то от $y^{(n)}$ функция F обязательно зависит. Наиболее простым дифференциальное уравнение (1) оказывается тогда, когда оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Примером такого простейшего уравнения служит хотя бы дифференциальное уравнение

$$y'' = -\frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

Из этого уравнения сразу видно, что

$$y' = -\int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. В свою очередь из уравнения (4) следует, что

$$y = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx + C_2 = \ln|x| + C_1 x + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная, никак не связанная с постоянной C_1.

Найденное решение зависит от *двух* произвольных постоянных, при этом исходное дифференциальное уравнение (3) было уравнением *второго* порядка. Такое решение называется *общим решением* этого уравнения.

Аналогично посредством n последовательных интегрирований решается любое уравнение вида (2). В связи с этим вводится

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка (1) называется функция

$$y = \varphi(C_1, C_2 \ldots, C_n),$$

существенно зависящая от n произвольных постоянных и обращающая уравнение (1) в тождество при любых значениях этих постоянных. Решения, получаемые из общего при закреплении постоянных C_1, $C_2 \ldots$, C_n, называются частными.

13.4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции в интервале $(a; b)$, называется *неоднородным линейным дифференциальным* *уравнением второго порядка*, функции p, q — его *коэффициентами*. Если $f(x) \equiv 0$ в этом интервале, то уравнение принимает вид

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*. Если уравнение (2) имеет те же коэффициенты, как (1), то оно называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (1).

Функции $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в интервале $(a; b)$, называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные числа α_1 и α_2 (причем по крайней мере одно из них не равно нулю), такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождество:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0. \tag{3}$$

Функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми* в интервале $(a; b)$, если тождество (3) может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 1. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (2), *то общее решение этого уравнения имеет вид:*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — *произвольные постоянные*.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (2), то имеем тождества $y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0$, $y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$. Используя их, получаем тождество:

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + C_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) = 0.$$

Следовательно, выражение (4) является решением уравнения (2), и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные, то оно является общим решением однородного уравнения (2). Теорема доказана.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно зависимых решения уравнения (2). Тогда выполняется тождество (3), где либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что $\alpha_2 \neq 0$. Тогда из тождества (3) имеем $y_2 = -(\alpha_1/\alpha_2)y_1$ или $y_2 = \alpha y_1 (\alpha = -\alpha_1/\alpha_2)$. Подставляя это выражение в равенство (4), получаем:

$$y = C_1y_1 + C_2ay_1 = (C_1 + aC_2)y_1 = Cy_1,$$

где $C = C + aC_2$. Отсюда видно, что если y_1 и y_2 — линейно зависимые решения однородного уравнения (2), то решение (4) содержит только одну произвольную постоянную C и, следовательно, не является общим.

Для общего решения неоднородного уравнения (1) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общее решение неоднородного уравнения* (1) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (2) *и любого частного решения данного неоднородного уравнения.*

Доказательство. Пусть $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ — общее решение уравнения (2), соответствующего уравнению (1), и z — любое частное решение уравнения (1). Имеем тождества $Y'' + pY' + qY = 0$, $z'' + pz' + qz = f(x)$. Складывая почленно эти два тождества, получим тождество $(Y + z)'' + p(Y + z)' + q(Y + z) = f(x)$. Следовательно, функция $y = Y + z = C_1y_1 + C_2y_2 + z$ — решение уравнения (1) и при этом общее, так как в эту функцию входят две произвольные постоянные C_1 и C_2.

2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть в линейном уравнении

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5}$$

p и q — постоянные действительные числа.

Частное решение уравнения (5) будем искать в виде функции

$$y = e^{kx}, \tag{6}$$

где k — действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по x выражение (6), получим:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (5), будем иметь:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $e^{kx} \neq 0$, имеем:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{8}$$

Алгебраическое уравнение (8) называется *характеристическим уравнением* однородного уравнения (5). Характеристическое уравнение и дает возможность найти k. Уравнение (8) есть уравнение второй степени и потому имеет два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны три случая.

1) Корни k_1 и k_2 действительные и разные ($k_1 \neq k_2$). В этом случае по формуле (6) получим два частных решения уравнения (5) $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, которые являются линейно независимыми. Действительно, если бы эти решения были линейно зависимы, то в интервале $(a; b)$ должно было бы выполняться тождество $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2{}^{ek_2 x} = 0$, где α_1 и α_2 одновременно не нули, или тождество $\alpha_1 e^{k_1 x} = -\alpha_2 e^{k_2 x}$. Отсюда $\alpha_1 e^{(k_1 - k_2)x} = -\alpha^2$, что невозможно, так как справа в последнем тождестве постоянное число, а слева функция от x. По теореме 1 (п. 1) следует, что общее решение уравнения (5) будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Поэтому общее решение есть: $y = C_1 e^x + C_2{}^{2x}$.

2) Корни k_1 и k_2 действительные и равные ($k_1 = k_2$). В этом случае одно частное решение уравнения (5) выразится функцией $y_1 = e^{k_1 x}$. Частным решением уравнения (5) в этом случае будет также функция $y_2 = xe^{k_1 x}$. Действительно, $y''_2 + py_2' + qy_2 = (2 + k_1 x)\, k_1 e^{k_1 x} + p(1 + k_1 x)e^{k_1 x} + qxe^{k_1 x} = e^{k_1 x} \cdot ((k^2_1 + pk_1 + q)x + 2k_1 + p) = e^{k_1 x}(-p + p) = 0$.

Заметим, что решения $e^{k_1 x}$ и $xe^{k_1 x}$ линейно независимы, так как если бы функции $e^{k_1 x}$ и $xe^{k_1 x}$ были линейно зависимы, то в интервале $(a; b)$ выполнялось бы тождество $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 xe^{k_1 x} = 0$ (α_1 и α_2 одновременно не нули) и, значит, тождество $\alpha_1 + \alpha_2 x = 0$, что невозможно. Следовательно, общее решение уравнения (5) в данном случае

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 xe^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 2. Уравнению $y'' - 6y' + 9y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$, имеющее равные корни $k_1 = k_2 = 3$. Поэтому общее решение будет

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

3) Корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ комплексные. Можно показать (см. [13]), что общее решение уравнения (5) в этом случае есть

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 3. Уравнению $y'' - 2y + 2y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$, имеющее комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общим решением будет функция $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9}$$

где p, q — постоянные действительные числа, $f(x)$ — известная непрерывная функция в интервале $(a; b)$. По теореме 2 (п. 1) для нахождения общего решения уравнения (9) надо знать общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ (для этого используются результаты п. 2 настоящего параграфа) и частное решение z уравнения (9).

Вид частного решения уравнения (9) зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$. Если $q \neq 0$, то частное решение уравнения (9) ищем также в форме квадратного трехчлена: $z = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где A_2, A_1, и A_0 — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = 2A_2x + A_1, z'' = 2A_2$. подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, получим тождество:

$$A_2qx^2 + (2A_2p + A_1q)x + 2A_2 + A_1p + A_0q = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

откуда

$$A_2q = a_2,\ 2A_2p + A_1q = a_1,\ 2A_2 + A_1p + A_0q = a_0. \tag{10}$$

Так как $q \neq 0$, то из равенства (10) для коэффициентов A_2, A_1 и A_0 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение z будет вполне определено. Если $q = 0$, то частное решение z уравнения (9) ищем в виде $z = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда 0 — однократный корень характеристического уравнения (8), и в виде $z = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда 0 — двукратный корень характеристического уравнения (8). Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ — многочлен $P(x)$ произвольной степени.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 1$. Имеем:

$$k^2 + k = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1, Y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Так как 0 — однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x(A_1x + A_0)$. Далее решаем, как и в случае а): $z' = 2A_1x + A_0$, $z'' = 2A_1$, $2A_1 + 2A_1x + A_0 = 2x + 1$, $A_1 = 1$,

$$A_0 = -1,\ z = x^2 - x,\ y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x.$$

б) $f(x) = ae^{bx}$ $(a \neq 0)$. Частное решение ищем в виде $z = Ae^{bx}$, где A — неопределенный коэффициент. Отсюда $z' = Abe^{bx}$, $z'' = Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь $A(b^2 + pb + q) = a$. Отсюда видно, что если b не является корнем характеристического уравнения, то

$$z = \frac{ae^{bx}}{b^2 + pb + q}.$$

Если b — корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (9) ищем в виде $z = Axe^{bx}$, когда b — однократный корень, и в виде $z = Ax^2e^{bx}$, когда b — двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x) = P(x)e^{bx}$.

Пример. 2. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$. Имеем: $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$, $Y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как в данном уравнении $b = 1$ — корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$z' = Ax(x + 2)e^x,\ z'' = A(x^2 + 4x + 2)e^x,$$

$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2\,Axe^x(x + 2) + A\,x^2e^x = 2e^x,\ A = 1,$$

$$z = x^2e^x,\ y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x.$$

в) $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение z ищем также в форме тригонометрического двучлена

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x,$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$, $z'' = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, получим:

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq)\cos\omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq)\sin\omega x = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу. Поэтому

$$A(q - \omega^2) + Bp\omega = a,\quad -Ap\omega + B(q - \omega^2) = b.$$

Эти уравнения определяют коэффициенты A и B, кроме случая, когда $p = 0$, $q = \omega^2$ (или когда $\pm\omega i$ — корни характеристического уравнения). В последнем случае частное решение уравнения (9) ищем в виде $z = x\,(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + y = \cos x$. Имеем: $k^2 + 1 = 0$, $k_1 = i$, $k_2 = -i$, $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Так как $\pm i$ — корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $z = x\,(A\cos x + B\sin x)$. Далее имеем:

$$z' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x,)$$
$$z'' = -2A\sin x + B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$
$$-2A\sin x + B\cos x = \cos x,\ A = 0,\ B = 1/2,\ z = (x/2)\sin x,$$
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + (x/2)\sin x.$$

4. Гармонический осциллятор. Резонанс. Пусть на идеально гладком столе лежит шарик массы m, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $\lambda > 0$ (рис. 165). Направим ось Ox вдоль пружины, а за начало координат примем ту точку, в которой шарик находится в положении равновесия (пружина не растянута). Отведем теперь шарик от положения равновесия на расстояние x_0, и отпустим его. Тогда со стороны пружины на шарик будет действовать сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Из физики известно, что эта сила равна (для малых x)

$$F(x) = -\lambda x \tag{11}$$

(знак минус поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению x).
Запишем второй закон Ньютона для шарика

$$F = ma, \tag{12}$$

где ускорение $a = d^2x/dt^2$ (см. 8.4, п. 2).

Из (11), (12) имеем:

$$ma = -\lambda x$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x.$$

Отсюда

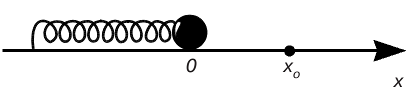


Рис. 165

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{13}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}.$$

Для уравнения (13) запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + \omega^2 = 0.$$

Его корнями будут

$$k_1 = \omega i,\ k_2 = -\omega i.$$

Поэтому общее решение уравнение (13) имеет вид:

$$x = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \tag{14}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Выясним теперь, каковы начальные условия. В момент времени $t = 0$ $x = x_0$, а скорость равна нулю; значит,

$$\begin{cases} x(0)=x_0, \\ x'(0)=0. \end{cases} \tag{15}$$

Но из (14) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t.$$

Поэтому (15) перепишется в виде

$$\begin{cases} C_1+0=x_0, \\ 0+C_2\omega=0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$
и

$$x = x_0 \cos \omega t. \tag{16}$$

Другими словами, шарик будет совершать гармонические колебания с амплитудой $|x_0|$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

(ω называется частотой колебаний; период T находим из формулы $\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$, где 2π — период косинуса).

Как говорят в физике, мы имеем здесь гармонический осциллятор.

В действительности мы знаем, что шарик не может колебаться бесконечно долго, и амплитуда колебаний стремится к нулю. Это происходит потому, что в любом реальном опыте присутствует сила трения, которой мы пренебрегли при выводе уравнения (13).

Однако если сила трения очень мала, а промежуток времени не слишком большой, то (13) и (16) описывают процесс с хорошим приближением.

Пусть теперь на шарик действует еще одна сила F_1, направленная вдоль оси Ox и изменяющаяся по закону:

$$F_1 = F_0 \sin pt$$

(F_0 и p — положительные постоянные).

Тогда второй закон Ньютона примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x + F_0 \sin pt$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha_0 \sin pt, \qquad (17)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Уравнение (17) называется уравнением *вынужденных колебаний*, а уравнение (13) — уравнением *свободных колебаний*.

Найдем частное решение неоднородного уравнения (17).

1) Пусть $p \neq \omega$, т. е. частота внешней силы не совпадает с частотой свободных колебаний. Частное решение ищем в виде:

$$z = A \cos pt + B \sin pt,$$

откуда

$$z' = -p A \sin pt + p B \cos pt,$$

$$z'' = -p^2 A \cos pt - p^2 B \sin pt.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17), получим:

$$-p^2 (A \cos pt + B \sin pt) + \omega^2 (A \cos pt + B \sin pt) =$$

$$= \alpha_0 \sin pt, A(\omega^2 - p^2) \cos pt + B(\omega^2 - p^2)\sin pt = \alpha_0 \sin pt.$$

Отсюда

$$A(\omega^2 - p^2) = 0, B(\omega^2 - p^2) = \alpha_0.$$

и, следовательно,

$$A = 0, \quad B = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}.$$

Поэтому

$$z = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

и общее решение уравнения (17) для случая $p \neq \omega$ будет

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

Это решение представляет собой наложение двух гармонических колебаний с частотами ω и p, причем колебания ограничены.

2) $p = \omega$, т. е. частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний. В этом случае частное решение уравнения (17) ищем в виде

$$z = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Отсюда

$$z' = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \omega t(-A \sin \omega t + B \cos \omega t),$$

$$z'' = 2(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) - t\omega^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17), получим:

$$2(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) = \alpha_0 \sin \omega t,$$

откуда

$$-2A\omega = \alpha_0,\ 2B\omega = 0$$

или

$$A = -\frac{\alpha_0}{2\omega}, \quad B = 0.$$

Поэтому

$$z = -\frac{\alpha_0 t}{2\omega} \cos\omega t$$

и общее решение уравнения (17) в случае $p = \omega$ будет

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega - \frac{\alpha_0 t}{2\omega} \cos\omega t.$$

Последняя формула показывает, что размах колебаний x неограниченно растет вместе со временем t (рис. 166). Это явление носит название *резонанса*. При работе многих механизмов резонанс крайне нежелателен, так как он приводит к нарушению их правильной работы и даже к разрушению.

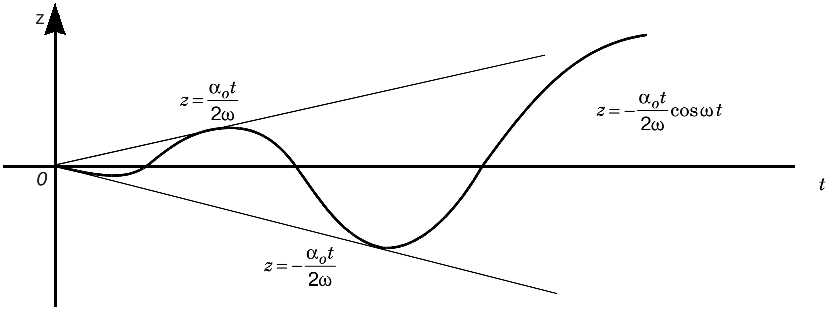


Рис. 166

Упражнения

Решить уравнения.

1. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$. $\quad [(1+y)(1-x)=C.]$
2. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$. $\quad [\mathrm{arctg}\, x+\mathrm{arctg}\, y=C.]$
3. $(1+e^x)yy''=e^x$. $\quad \left[\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C.\right]$
4. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$. $\quad \left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.\right]$
5. $e^{-y}(1+y')=1$. $\quad [e^x=C(1-e^{-y}).]$
6. $y'=2^{x+y}$. $\quad [2^x+2^{-y}=C.]$
7. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$. $\quad [1+e^y=C(1+x^2).]$
8. $2xyy'=x^2+y^2$. $\quad [x^2-y^2-Cx=0.]$
9. $(x+y)dx+xdy=0$. $\quad \left[y=-\frac{x}{2}+\frac{C}{x}.\right]$
10. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$. $\quad [x^3+3x^2y-y=C.]$
11. $y'=\frac{x-y}{x-2y}$. $\quad [x^2-2xy+2y^2=C.]$

Глава 14. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Векторный анализ является средством изучения полей.

14.1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1. Понятие скалярного поля. Пусть Ω — область в пространстве.

Если каждой точке M из Ω ставится в соответствие по известному закону число $u = u(M)$, то говорят, что в области Ω задано *скалярное поле* u. Иными словами, задать скалярное поле — это означает задать скалярную функцию $u = u(M)$, называемую *функцией поля.* Запись $u(M)$ означает, что величина u является, как говорят (11.1, п. 1), *функцией точки*. Заметим, что область Ω может быть и все пространство.

Если величина $u = u(M)$ не зависит от времени t, то скалярное поле u называется *стационарным* (или *установившимся*). В противном случае поле называется *нестационарным* (или *неустановившимся*).

Поле температуры внутри нагретого тела, поле плотности массы, поле распределения потенциала в электрическом поле — примеры скалярных полей.

Запись $u = u(M)$ не предполагает введения в пространстве никакой системы координат. Если же пространство отнесено к некоторой системе координат, например, к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то задание точки M равносильно заданию ее координат x, y, z в этой системе и функция поля $u(M)$ превращается в обычную функцию трех переменных $u(x, y, z)$. Мы всегда будем предполагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные.

Можно ввести в пространстве и другие системы координат, например, цилиндрическую и сферическую (12.2, п. 3). В цилиндрической системе координат функция поля $u = u(r, \varphi, z)$, в сферической $u = u(r, \varphi, \theta)$.

2. Поверхности уровня. Скалярные поля часто изображаются геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется множество точек пространства, в которых функция поля и имеет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня в прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет вид $u(x, y, z) = C$, где C — некоторая постоянная.

Заметим, что в курсе физики при рассмотрении поля потенциала поверхности уровня называют обычно *эквипотенциальными поверхностями* (т. е. поверхностями равного потенциала).

Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

Указанный способ изображения скалярного поля удобен, если речь идет о *плоском* поле, т. е. о поле, заданном в плоской области. Функция u этого поля зависит только от двух переменных: x и y. Поэтому плоские скалярные поля геометрически изображают с помощью *линий уровня* (см. 11.1, п. 2).

В случае поля температур на плоскости линии уровня называются *изотермами*, в случае поля давлений — *изобарами* и т. д.

3. Производная поля по направлению.

Определение. *Производной скалярного поля $u(M)$ в точке M по направлению $\bar{n}$* называется предел (если он существует) отношения приращения Δu функции $u(M)$ при смещении точки M в направлении вектора $\bar{n}$ (рис. 167) к величине этого смещения $d = MM_1$, когда последнее стремится к нулю; она обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial n}$:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta u}{d} = \lim_{d \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{d}. \qquad (1)$$

Выведем для $\frac{\partial u}{\partial n}$ формулу, удобную в вычислительном отношении. Пусть x, y, z — координаты фиксированной точки M, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{n}$. Тогда точка M_1 будет иметь координаты $x + d\cos\alpha$, $y + d\cos\beta$, $z + d\cos\gamma$. Величины x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ фиксированы, поэтому $u(M_1)$ является функцией только смещения d. Обозначим эту функцию через

$$\psi(d) = u(x + d\cos\alpha,\ y + d\cos\beta,\ z + d\cos\gamma).$$

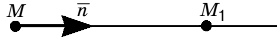


Рис. 167

Имеем $\psi(0) = u(x, y, z)$. Следовательно, в силу равенства (1),

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{d \to 0} \frac{\psi(d) - \psi(0)}{d} = \psi'(0).$$

Формула производной сложной функции (11.2, п. 4) дает

$$\psi'(d) = u'_x(M_1)\cos\alpha + u'_y(M_1)\cos\beta + u'_z(M_1)\cos\gamma,$$

откуда

$$\psi'(0) = u'_x(M)\cos\alpha + u'_y(M)\cos\beta + u'_z(M)\cos\gamma,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (2)$$

Из формулы (2) видно, что если направление $\bar{n}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, т. е. $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \pi/2$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично, если направление $\bar{n}$ будет совпадать с направлением оси Oy (Oz).

Подобно тому, как частные производные u'_x, u'_y, u'_z характеризуют скорость изменения функции u в направлении осей координат (11.2, п. 1), так и производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial n}$ будет являться *скоростью* изменения функции $u(x, y, z)$ в точке M по направлению $\bar{n}$. *Абсолютная величина производной* $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению $\bar{n}$ определяет величину скорости, а *знак производной* — характер изменения функции u (возрастание или убывание). В этом состоит *физический* смысл производной по направлению.

Из формулы (2) следует, что производная по направлению $\bar{n}'$, *противоположному направлению* $\bar{n}$, равна *производной по направлению* $\bar{n}$, *взятой с обратным знаком*. Действительно, при перемене направления углы α, β, γ изменяется на π.

Если поле u плоское, то направление $\bar{n}$ вполне определено углом α его наклона к оси абсцисс. Формулу для производной по направлению в случае такого поля можно получить из общей формулы (2), положив $\gamma = \pi/2$ и $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

При этом если $\alpha = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$, а если $\alpha = \pi/2$, то $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

4. Градиент скалярного поля. Пусть дано скалярное поле $u = u(M)$ $u(x, y, z)$.

Определение. Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ называется *градиентом скалярного поля* $u = u(M)$ в точке M и обозначается

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}. \tag{3}$$

Обозначим через $\bar{n}_0$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор направления $\bar{n}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\operatorname{grad} u\cdot\bar{n}_0=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi=\operatorname{np}_{\bar{n}}\operatorname{grad} u,$$

где φ — угол между векторами grad u и $\bar{n}$.

Значит, *производная скалярного поля* u (M) *в точке* M *в данном направлении равна проекции градиента поля в точке* M *на это направление.* Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ в точке M имеет *наибольшее значение в направлении градиента* (для этого направления $\varphi = 0$ и $\cos 0 = 1$). В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial n}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Таким образом, grad u *есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания скалярного поля и в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания*. В этом состоит *физический* смысл градиента.

В плоском скалярном поле $u = u(M) = u(x, y)$ градиент определяется равенством:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Определить градиент скалярного поля потенциала электростатического поля, образованного точечным зарядом величины q, помещенным в начало координат.

Из электростатики известно, что упомянутый потенциал в точке $M(x, y, z)$ равен $u = q/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. По формуле (3) находим:

$$\operatorname{grad} u=-\frac{q}{r^2}\frac{x}{r}\bar{i}-\frac{q}{r^2}\frac{y}{r}\bar{j}-\frac{q}{r^2}\frac{z}{r}\bar{k}=-\frac{q}{r^2}\frac{\bar{r}}{r}=-\frac{q}{r^2}\bar{r}_0,$$

где $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ — радиус-вектор точки M, а $\bar{r}_0=\bar{r}/r$ единичный вектор в направлении радиус-вектора. Вектор $\bar{E}=(q/r^2)\bar{r}_0$ называется *вектором напряженности* рассматриваемого электростатического поля в точке M. Таким образом, $\mathrm{grad}u=-\bar{E}$.

5. Оператор набла и исчисление градиентов. Английским математиком У. Гамильтоном (1805–1865) был введен векторный дифференциальный оператор

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

называемый *оператором набла*. (Набла — греческое слово, означающее «арфа» — музыкальный инструмент, по форме напоминающий перевернутый треугольник.) В этой формуле величина, к которой прилагается оператор ∇, должна быть поставлена под знаком частных производственных (оператором дифференцирования) $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и т. д. При этом существенно отметить, что единичные векторы следует писать до операторов дифференцирования, так как эти операторы действуют на выражения, стоящие справа от них.

Поэтому

$$\nabla u=\bar{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{или} \quad \nabla u=\mathrm{grad}u.$$

Из известных (см. 11.2) правил дифференциального исчисления функций нескольких переменных вытекают следующие простые правила:

1. $\nabla(C_1u+C_2v)=C_1\nabla u+C_2\nabla v$

(C_1+C_2 — постоянные, u, v — функции переменных x, y, z), т. е.

$$\mathrm{grad}\,(C_1u+C_2v)=C_1\,\mathrm{grad}\,u+C_2\,\mathrm{grad}\,v.$$

2. $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$,

т. е.

$$\mathrm{grad}\,(uv)=v\,\mathrm{grad}\,u+u\,\mathrm{grad}\,v.$$

3. $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$,

т. е.

$$\mathrm{grad}\,f(u)=f'(u)\,\mathrm{grad}\,u.$$

4. $\nabla f(u, v)=f'_u\nabla u+f'_v\nabla v$,

т. е.

$$\operatorname{grad} f(u, v) = f'_u \operatorname{grad} u + f'_v \operatorname{grad} v.$$

Аналогично в случае $f(u, v, w)$.

14.2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1. Векторное поле. Векторные линии. Пусть Ω — область в пространстве.

Если каждой точке M из Ω сопоставлен вполне определенный вектор $\bar{a}(M)$, то говорят, что в области Ω задано *векторное поле* $\bar{a}$.

Заметим, что областью Ω может быть и все пространство. Мы будем рассматривать стационарные векторные поля, в которых вектор $\bar{a}(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени.

Поле силы тяжести, поле скорости частиц текущей жидкости, поле электрической и магнитной индукции, поле плотности электрического тока — примеры векторных полей.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ вектор $\bar{a}(M)$ запишется в виде (2.1, п. 8)

$$\bar{a}(M) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k},$$

где $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ (кратко a_x, a_y, a_z) — проекции вектора, заданного в точке $M(x, y, z)$, соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz. В 9.13 рассматривалась векторная функция одного скалярного аргумента. Здесь изучаем векторную функцию *трех* скалярных аргументов.

Дальше всюду предполагается, что функции a_x, a_y, a_z непрерывны вместе со своими частными производными.

Укажем на частные случаи векторных полей.

Векторное поле называется *однородным, если* $\bar{a}(M)$ — постоянный вектор, т. е. a_x, a_y, a_z — постоянные величины. Примером однородного поля может служить, например, поле силы тяжести.

Векторное поле называется *плоским*, если проекции вектора $\bar{a}(M)$ не зависят от одной из трех переменных x, y, z и одна из проекций равна нулю, например:

$$\bar{a}(M) = a_x(x, y,)\bar{i} + a_y(x, y)\bar{j}.$$

С плоскими полями очень часто приходится встречаться в гидродинамике при изучении *плоских течений жидкости*, т. е. таких течений, когда все частицы жидкости движутся параллельно некоторой плоскости, причем скорости частиц, расположенных на одной и той же прямой, перпендикулярной к этой плоскости, одинаковы.

Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с вектором, соответствующим этой точке (рис. 168).

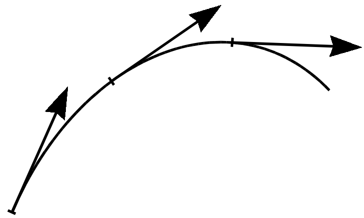


Рис. 168

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, если мы рассматриваем поле скоростей текущей жидкости, то векторные линии суть *линии тока* этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

В электрическом поле векторные линии — это *силовые линии* этого поля. Например, в поле точечного заряда такими линиями будут лучи, выходящие из заряда. Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

2. Поток векторного поля через поверхность. Как уже отмечалось (см. 12.4, п. 3), количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ, выражается формулой:

$$\prod = \iint_\sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

или в силу формулы (15) из 12.4 формулой:

$$\prod = \iint_\sigma (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)ds. \quad (1)$$

Величина П называется *потоком жидкости* через поверхность σ. Поскольку P, Q, R — координаты вектор-скорости $\bar{v}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты единичного вектора $\bar{n}_0$ нормали $\bar{n}$ к поверхности σ, то $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \bar{v}\bar{n}_0$, и формулу (1) можно записать в виде:

$$\prod = \iint_\sigma \overline{v}\overline{n}_0 ds, \quad \text{или} \quad \prod = \iint_\sigma v_n ds,$$

где v_n — проекция вектора $\bar{v}$ на нормаль $\bar{n}$.

Определение. *Потоком* П вектора $\bar{a}(M)$ или *потоком векторного поля* $\bar{a}(M)$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл:

$$\prod = \iint_\sigma \overline{a}(M)\overline{n}_0 ds, \quad (2)$$

где $\bar{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности σ в ее текущей точке M. Поверхность должна быть ориентированной, это означает, что в каждой ее точке выбрано одно из двух направлений нормали так, чтобы $\bar{n}(M)$ непрерывно менялся по поверхности σ. В случае замкнутой поверхности σ в качестве $\bar{n}(M)$ выбирается вектор внешней нормали.

Пусть

$$\bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad \bar{n}_0 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma.$$

Тогда

$$\prod = \iint\limits_{\sigma}(a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)ds.$$

Отсюда, согласно формуле (15) из 12.4 (п. 5), интеграл (2) можно представить в виде:

$$\prod = \iint\limits_{\sigma} a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy.$$

Таким образом, вычисление потока вектора сводится к вычислению интегралов по поверхности. Из самого определения следует, что поток вектора П — величина скалярная. Если изменить направление нормали $\bar{n}$ на противоположное, т. е. переменить сторону поверхности σ, то (12.4, п. 3) поток П изменит знак. Так как скалярное произведение вектора $\bar{a}(M)$ на единичный вектор нормали $\bar{n}$ равно $a_n(M)$ — проекции вектора $\bar{a}(M)$ на направление $\bar{n}$ (2.2, п. 1), то поток П можно представить в виде

$$\prod = \iint\limits_{\sigma} a_n(M)ds. \tag{3}$$

Отсюда, в частности, следует, что если на некотором участке поверхности проекция вектора $\bar{a}(M)$ на нормаль постоянна, т. е. $a_n(M) = C = \text{const}$, то поток через такой участок просто равен CQ, где Q — площадь этого участка поверхности.

Пример. Найти поток радиус-вектора $\bar{r}$ через боковую поверхность σ_1, верхнее основание σ_2 и нижнее основание σ_3 прямого цилиндра радиуса R и высотой H, если начало координат лежит в центре нижнего основания цилиндра, а ось цилиндра совпадает с осью Oz (рис. 169).

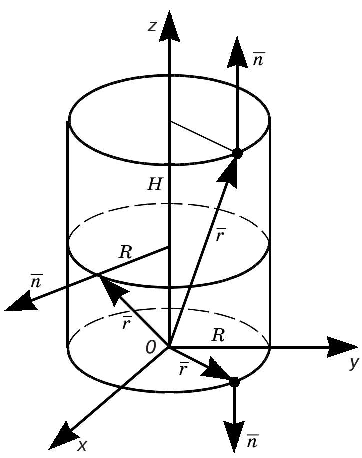


Рис. 169

На всех поверхностях $\bar{n}$ имеет направление внешней нормали. На боковой поверхности σ_1 внешняя нормаль $\bar{n}$ параллельна плоскости xOy и проекция r_n равна R. Поэтому, используя формулу (3) и формулу $\iint\limits_{\sigma} ds = S\sigma$ (12.4, п. 1), получаем:

$$\prod{}_1 = \iint\limits_{\sigma_1} R\,ds = R\cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H.$$

На верхнем основании σ_2 нормаль $\bar{n}$ направлена параллельно оси Oz и $r_n = H$. Следовательно,

$$\prod{}_2 = \iint\limits_{\sigma_2} H\,ds = H\pi R^2 = \pi R^2 H.$$

Наконец, на нижнем основании σ_3 проекции $r_n = 0$ и $\Pi_3 = 0$.

Особый интерес представляет случай, когда σ — замкнутая поверхность. Если берется внешняя нормаль, то мы будем говорить о *потоке изнутри* поверхности σ. Он обозначается так:

$$\prod = \oiint\limits_{\sigma} a_n(M)\,ds.$$

(В векторном анализе интегралы по замкнутым поверхностям обозначаются обычно $\oiint\limits_{\sigma}$; часто также употребляют и символ $\oint\limits_{\sigma}$.) Область, которую ограничивает поверхность σ, будем обозначать Ω.

Когда векторное поле $\bar{a}(M)$ представляет поле скоростей жидкости, величина потока П дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области Ω, и количеством жидкости, втекающей в эту область. (Действительно, так как интеграл $\oiint\limits_{\sigma} a_n ds$ берется по внешней стороне поверхности, то если вектор скорости $\bar{v}$ в данной точке поверхности σ направлен наружу, то $\bar{v}\bar{n}_0 > 0$; если же вектор $\bar{v}$ направлен внутрь, то $\bar{v}\bar{n}_0 < 0$.)

Если $\Pi = 0$, то в область Ω жидкости втекает столько же, сколько и вытекает. Так, например, будет для любой области, расположенной в потоке воды, текущей в реке.

Если же величина П отлична от нуля, например, положительна, то из области Ω жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области Ω имеются *источники*, питающие поток жидкости. Наоборот, если величина П отрицательна, то это указывает на наличие *стоков* — мест, где жидкость удаляется из потока.

Равенство нулю потока П может означать либо отсутствие источников и стоков, либо, по крайней мере, наличие такого рас-

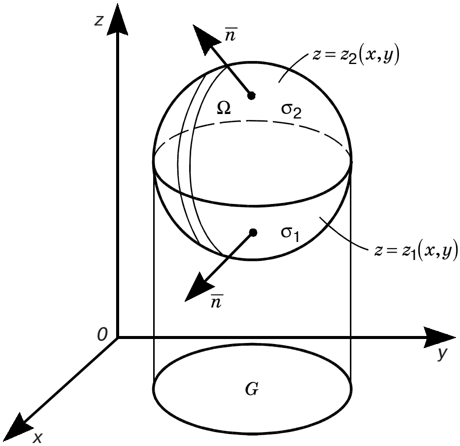


Рис. 170

пределения источников и стоков, что их общая мощность равна нулю.

3. Формула Остроградского—Гаусса. Дивергенция. Формула Остроградского—Гаусса (М. В. Остроградский (1801–1861) — русский математик) связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности и тройной интеграл по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Эта формула является аналогом формулы Римана—Грина (12.3, п. 4), связывающей криволинейный интеграл по замкнутой кривой с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этой кривой.

Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ кратко (P, Q, R) непрерывны вместе со своими частными производными P'_x, Q'_y, R'_z в замкнутой пространственной области Ω, граница которой пересекается в любой прямой, параллельной осям координат, не более чем в двух точках. Назовем для краткости такие области *простыми*. При этом будем рассматривать внешнюю сторону поверхности σ, ограничивающей эту область. Предполагается, что поверхность гладкая или кусочно-гладкая (12.4, п. 1).

Пусть область G есть проекция поверхности σ (и области Ω) на плоскость xOy (рис. 170), а $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения соответствующих частей σ — нижней части σ_1 и верхней σ_2, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны в области G. Преобразуем, как указано ниже, интеграл $\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz \underset{I}{=} \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$\underset{II}{=} \iint\limits_{G} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)))dxdy =$$

$$\underset{III}{=} \iint\limits_{\sigma_2} R(x, y, z)dxdy - \iint\limits_{\sigma_1} R(x, y, z)dxdy.$$

Преобразование I основано на правиле вычисления тройного интеграла (12.2), II — на формуле Ньютона—Лейбница (9.7, п. 2), III — на формуле (14) из п. 4 12.4. В результате получаются интегралы по верхним сторонам поверхностей σ_1 и σ_2. Меняя в интеграле по σ_1 сторону поверхности, с учетом свойств поверхностного интеграла второго рода (12.4, п. 3), получаем:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} R(x, y, z) dxdy, \tag{4}$$

где интеграл справа берется по внешней стороне поверхности σ.

Аналогичным образом устанавливаются формулы:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Pdydz, \tag{5}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Qdzdx. \tag{6}$$

Складывая почленно равенства (4), (5), (6), приходим к формуле

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \tag{7}$$

называемой *формулой Остроградского—Гаусса* (в координатной форме), где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности σ.

Замечание. Формула Остроградского—Гаусса остается верной и для любой замкнутой пространственной области Ω, которую можно разбить на конечное число простых областей.

Укажем теперь на векторную запись формулы Остроградского—Гаусса. Если в формуле (7) функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторого вектора $\bar{a}(M)$, то правая часть ее равна потоку вектора $\bar{a}(M)$ (п. 2) через замкнутую поверхность σ (в направлении внешней нормали к σ), а выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

называемое *дивергенцией* векторного поля $\bar{a}(M)$ (ее обозначение $\operatorname{div} \bar{a}(M)$, т. е. $\operatorname{div} \bar{a}(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$), равно $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ и формула Остроградского—Гаусса может быть переписана в виде

$$\oiint\limits_{\sigma} a_n(M)ds = \iiint\limits_{\sigma} \mathrm{div}\,\bar{a}(M)dv. \qquad (8)$$

Она выражает следующий результат: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* (в направлении внешней нормали к ней) *равен тройному интегралу от дивергенции этого поля, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.*

Предположим, что в некоторой точке M дивергенция скорости $\bar{v}$ положительна: $\mathrm{div}\,\bar{v} > 0$. В силу непрерывности частных производных она является положительной и в точках достаточно малого шара w, ограниченного сферой σ с центром в точке M. Но тогда $\iiint\limits_{w} \mathrm{div}\,\bar{v}dxdydz > 0$, следовательно, на основании формулы (8) $\iint\limits_{\sigma} v_n ds > 0$, т. е. из области w через ее границу σ жидкости вытекает больше, чем втекает. По этой причине точку M называют *источником*. Если же $\mathrm{div}\,\bar{v} < 0$ в точке M, то через достаточно малую сферу с центром в этой точке втекает жидкости больше, чем вытекает. Поэтому точку M в этом случае называют *стоком* (то же и в случае произвольного векторного поля $\bar{a}(M)$).

Векторная форма формулы Остроградского—Гаусса выражает в поле текущей жидкости тот факт, что поток жидкости через поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков, т. е. количеству жидкости, возникающей в рассматриваемой области за единицу времени. (Если мощность стоков больше, чем источников, то жидкость в области исчезает.) Если, в частности, дивергенция во всех точках равна нулю, то равен нулю и поток через любую замкнутую поверхность.

Пример 1. Вычислить дивергенцию поля скоростей жидкости $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$, где a, b и c — постоянные. Это однородное векторное поле. Ясно, что $\mathrm{div}\,\bar{v} = 0$.

Таким образом, в данном поле нет ни источников, ни стоков. Все частицы жидкости имеют одну и ту же скорость, жидкость движется поступательно как твердое тело. Поток такой жидкости через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Пример 2. Вычислить поток вектора $\bar{a} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через замкнутую поверхность. Так как $\mathrm{div}\,\bar{v} = 3$, то по формуле (8) получаем, что $\prod = 3\iiint\limits_{\Omega} dv = 3V_{\Omega}$. Таким образом, поток радиус-вектора $\bar{r}$ через замкнутую поверхность равен утроенному объему области, ограниченной этой поверхностью.

Примечание 1. Заметим, что формулу для дивергенции можно записать в виде

$$\mathrm{div}\,\bar{a} = (\nabla, \bar{a}),$$

если под $(\nabla, \bar{a})$ понимать формально образованное скалярное произведение векторов

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{и} \quad \bar{a} = \bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

обращаясь с операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ как со скалярными величинами.

Примечание 2. Рассмотрим некоторые формулы, облегчающие вычисление дивергенции более сложных векторных полей.

1. Если C_1 и C_2 — скалярные постоянные, то, согласно известным свойствам скалярного произведения (см. 2.2, п. 1), имеем:

$$(\nabla, C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1(\nabla, \bar{a}_1) + C_2(\nabla, \bar{a}_2), \quad \text{т.е.} \quad \operatorname{div}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1\operatorname{div}\bar{a}_1 + C_2\operatorname{div}\bar{a}_2.$$

2. Если $\bar{a}$ — векторное поле постоянного направления, $\bar{a} = u(M)\bar{c}$, где $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$ — постоянный вектор, а $u = u(M)$ — скалярное поле, то

$$(\nabla, \bar{a}) = (\nabla, u\bar{c}) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} = (\bar{c}, \nabla u),$$

т. е.

$$\operatorname{div}(u\bar{c}) = (\operatorname{grad} u, \bar{c}).$$

3. Если $\bar{c} = \bar{c}(M)$ — переменный вектор, $u = u(M)$ — скалярное поле, то

$$(\nabla, uc) = c_x\frac{\partial u}{\partial x} + c_y\frac{\partial u}{\partial y} + c_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}\right) = (\bar{c}, \nabla u) + u(\nabla, \bar{c}),$$

т. е.

$$\operatorname{div}(u\bar{c}) = (\operatorname{grad} u, \bar{c}) + u\operatorname{div}\bar{c}.$$

4. Циркуляция и ротор векторного поля. Под *циркуляцией* векторного поля $\bar{a}(M)$ по контуру L понимается следующий интеграл по замкнутому пути L, снабженному направлением обхода:

$$Ц_L = \oint\limits_L a_\tau dl,$$

где a_τ — проекция вектора поля $\bar{a}(M)$ на касательную к пути L в точке M, причем на этой касательной положительным считается то направление, которое совпадает с направлением обхода контура (рис. 171).

Очевидно, что циркуляция тем больше, чем ближе направление вектора $\bar{a}(M)$ в каждой точке M пути L к направлению указанной касательной. Очевидно, что изменение направления обхода контура L влечет за собой изменение знака циркуляции на обратный.

Определение. *Ротором* векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ называется вектор

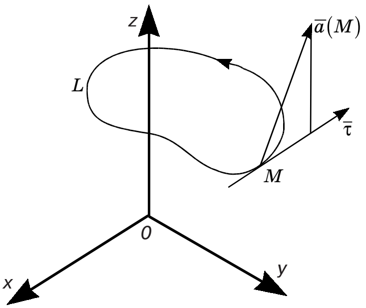


Рис. 171

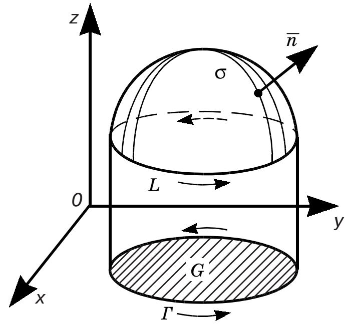


Рис. 172

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Его обозначение rot $\bar{a}$.
Таким образом,

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

или для удобства запоминания

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$

Следовательно (см. 3.3, п. 1), rot $\bar{a} = [\nabla, \bar{a}]$.

Точно так же, как для градиента и дивергенции,

$$\operatorname{rot}(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2) = C_1\operatorname{rot}\bar{a}_1 + C_2\operatorname{rot}\bar{a}_2.$$

Для ротора поля постоянного направления $\bar{a} = u\bar{c}$, где $\bar{c}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}$ — постоянный вектор, а $u = u(M)$ — скалярное поле, имеем:

$$\operatorname{rot}(u\bar{c}) = -[\bar{c}, \operatorname{grad} u]. \qquad (9)$$

Формула (9) является частным случаем более общей формулы. Если $\bar{c} = \bar{c}(M)$ — переменный вектор, то $[\nabla, u\bar{c}] = -[\bar{c}, \nabla u] + u[\nabla, \bar{c}]$.

Пример 1. Если $\bar{c}$ — постоянный вектор, то rot $\bar{c} = 0$.
Пример 2. Если $\bar{a} = \bar{r}$ — радиус-вектор, то

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\bar{k} = 0.$$

5. Формула Стокса (Джордж Габриэль Стокс (1819–1903) — английский физик и математик). Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Римана—Грина (12.3, п. 4), позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности σ к вычислению криволинейного интеграла по контуру L, ограничивающему эту поверхность (рис. 172). Будем считать, что поверхность σ пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке. Пусть $z = z(x, y)$ — уравнение поверхности σ, где функции $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ непрерывны в замкнутой области G — проекции σ на плоскость xOy, L — контур, ограничиваюший σ, а Γ — его проекция на плоскость xOy, являющаяся контуром, ограничивающим область G. Выберем для ориентации верхнюю сторону поверхности σ (рис. 172).

Пусть функция $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ (кратко P, Q, R) непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности σ.

Рассмотрим интеграл

$$\oint_L P(x, y, z)dx,$$

где направление обхода контура L согласовано с выбором стороны поверхности (см. рис. 172). В случае выбора нижней стороны поверхности σ направление обхода контура L также должно быть согласовано с таким выбором.

Так как контур L лежит на поверхности σ, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z = z(x, y)$, и поэтому значения функции P в точках контура L равны значениям функции $P(x, y, z(x, y))$ в соответствующих точках контура Γ. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров L и Γ на ось Ox совпадают. Значит, совпадают интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам L и Γ, а значит, равны и интегралы

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))dx.$$

Далее, применяя формулу Римана—Грина (12.3, п. 4), перейдем к двойному интегралу по области G. Получаем:

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right)dxdy.$$

Так как выбрана верхняя сторона поверхности s (см. 12.4, п. 3), то направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к ней выражаются формулами (2.2, п. 3; 11.2, п. 5):

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}.$$

Отсюда $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -z'_y$. Поэтому

$$-\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z'_y\right)dxdy = -\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy.$$

Теперь, воспользовавшись формулами (14) и (15) из 12.4, можно этот двойной интеграл преобразовать в поверхностный. Получаем:

$$-\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = -\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)ds.$$

Итак,

$$\oint\limits_{L} Pdx = \iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds. \qquad (10)$$

(Можно показать, что формула (10) верна и для поверхностей более сложного вида.)

Аналогично доказывается при соответствующих условиях справедливость еще двух формул:

$$\oint\limits_{L} Qdy = \iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds, \qquad (11)$$

$$\oint\limits_{L} Rdx = \iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \qquad (12)$$

Складывая почленно равенства (10), (11), (12), получаем формулу

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma}\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\Bigg)ds, \qquad (13)$$

называемую *формулой Стокса*.

Интеграл в левой части формулы (13) равен $\oint\limits_L a_\tau dl$ (см. 12.3) — циркуляция вектора $\bar{a}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ вдоль контура L. Интеграл в правой части представляет поток вектора rot $\bar{a}$ через поверхность σ, ограниченную контуром L.

Следовательно, формулу Стокса в векторной форме можно записать так:

$$\oint\limits_L a_\tau dl=\iint\limits_\sigma \text{rot}_n\,\bar{a}ds. \qquad (14)$$

Таким образом, циркуляция вектора $\bar{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку вихря этого вектора $\bar{a}$ через поверхность σ, лежащую в поле вектора $\bar{a}$ и ограниченную контуром L.

Формулу Стокса с помощью формулы связи поверхностных интегралов (12.4, п. 5, формула (15)) можно переписать в виде

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx. \qquad (15)$$

Формулу (15) легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части — это то же выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Римана—Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R.

В частности, если поверхность σ — область плоскости xOy, ограниченная контуром L, то интегралы по $dzdx$ и $dydz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Римана—Грина.

Примечание. Из теоремы Стокса следует, что циркуляция постоянного вектора вдоль любого контура равна нулю, так как rot $\bar{c}=0$ (п. 5, пример 1), и по формуле (14)

$$\oint\limits_L a_\tau dl=0.$$

Раздел III
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 15. СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

15.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Понятие о случайном событии. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытанием*. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Определение 1. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков, событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Определение 2. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 2. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Пример 3. Испытание: однократное бросание игральной кости. Пусть события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. Эти события являются несовместимыми.

Определение 3. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

Пример 4. Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \overline{B}$ или $\overline{A} = B$.

Определение. 4. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 5. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Определение 5. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 6. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но оно может и не наступить в данном испытании.

2. Алгебра событий.

Определение 1. *Суммой* событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

Пример. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ — называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i ($i = 1, 2, ..., k$).

Из определения 1 непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также и сочетательное свойство. Однако $A + A = A$ (а не $2A$, как в алгебре).

Определение 2. *Произведением* событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ называется событие $A = A_1A_2...A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения 2 непосредственно следует, что $AB = BA$. Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако $AA = A$ (а не A^2).

3. Классическое определение вероятности. Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Определение 1. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Приведем примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 2. События $U_1, U_2, \ldots, U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями*.

Пример 1. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Как уже отмечалось, события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ являются и равновозможными, т. е. являются элементарными.

Определение 3. Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 2. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4, U_6 — появление соответственно двух, четырех, шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного очка; события U_2, U_4, U_6 благоприятствуют событию A.

Определение 4 (классическое определение вероятности). *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение m/n числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е. $P(A) = m/n$.

Пример 3. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты. Очевидно, событие A — выпадение герба — и событие B — выпадение цифры — образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь $n = 2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т. е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A) = 1/2$.

Пример 4. Очевидно, что в опыте с игральной костью (пример 1) $P(U_i) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$.

Пример 5. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A).

Число элементарных событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 или 6). Поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т. е. $m = n$, и, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{o}{n} = 0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа n элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < m/n < 1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

4. Относительная частота. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней не равновозможно.

В таких случаях используется так называемое статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз.

Определение 1. Число m называется *абсолютной частотой* (или просто *частотой*) события A, а отношение $P^*(A) = m/n$ называется *относительной частотой* события A.

Пример 1. При транспортировке из 10 000 арбузов испортилось 26. Здесь $m = 26$ — абсолютная частота испорченных арбузов, а $P^*(A) = 26/10\,000 = 0{,}0026$ относительная.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n — числа испытаний в сериях — относительная частота

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

приближается к некоторому числа $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Пример 2. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0,485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484. (Данные взяты из книги [14].) Эти частоты группируются около числа 0,5.

Определение 2 (статистическое определение вероятности). Вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

В примере 2 вероятность в статистическом смысле равна 0,5.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью в статистическом смысле, если число испытаний достаточно велико (имеется огромный опытный материал по проверке последнего утверждения).

С этой точки зрения величина $m = nP(A)$ представляет собой среднее значение числа появления события A при n испытаниях.

Статистическое определение вероятности, использующее статистическую обработку данных, находит широкое применение.

При широких предположениях доказывается, что вероятности события в классическом и статистическом смыслах совпадают между собой.

15.2. СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{1}$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B — l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A+B$ будет благоприятствовать $k+l$ элементарных событий. По определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A+B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{2}$$

Так как события A и $\overline{A}$ несовместимы, то по доказанной теореме $P(A) + P(\overline{A}) = P(A+\overline{A})$. Событие $A+\overline{A}$ есть достоверное событие (ибо одно из событий A или $\overline{A}$ произойдет). Поэтому $P(A+\overline{A}) = 1$, что и приводит к искомому соотношению (2).

Пример. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих, 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар? Вероятность вынуть красный шар $P(A) = 3/10$, синий $P(B) = 5/10$. Так как события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме $P(A+B) = P(A) + P(B) = 3/10 + 5/10 = 0{,}8$.

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называют *зависимыми*. (Несколько событий A_1, ..., A_k называются *независимыми в совокупности*, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли ли какие-либо другие рассматриваемые события или нет).

Пример 1. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A) = 1/2$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B) = 1/2$, т. е. события A и B независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается ($P(B) = 1/3$); если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается ($P(B) = 2/3$). Здесь вероятность события B зависит от появления или непоявления события A, т. е. события A и B зависимые.

Определение 2. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью $P_A(B)$* события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило. Так, в примере 1 $P_A(B) = 1/3$.

Заметим, что если события A и B независимые, то

$$P_A(B) = P(B).$$

Теорема 1. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

Замечание. Применив формулу (3) к событию BA, получим:

$$P(BA) = P(B)P_B(A).$$

Так как $AB = BA$ (см. 15.1, п. 2), то получаем, что

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Пример 2. В условиях примера 1 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белый шар! По формуле (3) имеем:

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Теорема 2. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий*:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{5}$$

Действительно, если A и B — независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (3) превращается в формулу (5).

Отметим, что в случае независимости событий эта теорема распространяется на любое конечное их число.

Пример 3. Найти вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

События A и B независимы, поэтому по теореме 2 искомая вероятность

$$P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий.

Теорема. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда

$$P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие, и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (1) является частным случаем формулы (6).

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны $P(A) = 0{,}7$ и $P(B) = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы. Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

4. Формула полной вероятности. Пусть событие A может произойти лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем называть *гипотезами* для события A. Тогда

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (7)$$

Это *формула полной вероятности*.

В самом деле, событие A может наступить только при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, т. е.

$$A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA,$$

причем, ввиду несовместимости событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, события $B_1A, B_2A, \ldots B_nA$ также несовместимы. Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA) = P(B_1)P_{B_1}(A) +$$
$$+ P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

5. Формула Бейеса. Пусть в условиях рассуждения, относящегося к формуле полной вероятности, произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. Спрашивается: как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) вероятности гипотез, т. е. величины $P(B_k)$, $k = 1, \ldots, n$?

Найдем условную вероятность $P_A(B_k)$.

По теореме умножения вероятностей и формуле (4) (см. п. 2) имеем:

$$P_A(AB_k) = P(A)\, P_A(B_k) = P(B_k)\, P_{B_k}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

Наконец, используя формулу полной вероятности, находим:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)} \; (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Формулы (8) называются *формулами Бейеса* (Томас Бейес, или Байес, (1702–1761) — английский математик).

15.3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающей вопрос о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Как при решении задач с использованием классического определения вероятности, так и в дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Определение 1. *Размещениями* из n различных элементов по m элементов ($m \leq n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующие размещения: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется с помощью формулы $A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots$ $\ldots (n-m+1)$.

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n.

Как видно из определений 1 и 2, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$. Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_и = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Определение 3. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Отметим разницу между сочетаниями и размещениями: в первых не учитывается порядок элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Приведем, наконец, один из примеров применения формул комбинаторики к нахождению вероятности события.

Пример. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию M (цифры набраны правильно) будет только один способ. Поэтому

$$P(M) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

Глава 16. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

16.1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие случайной величины.

Определение 1. *Случайной величиной* называется переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Примеры. 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2) Прирост веса домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого промежутка.

3) Число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значение: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

4) Расстояние между эпицентром взрыва бомбы и целью, на которую она сброшена, есть случайная величина, которая может принять любое неотрицательное значение.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Определение 2. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*.

Случайные величины из примеров 1 и 3 дискретные.

Определение 3. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

Случайные величины из примеров 2 и 4 являются непрерывными.

Определение 4. Под *суммой* (*произведением*) случайных величин X и Y понимают случайную величину $Z = X + Y$ ($Z = XY$), возможные значения которой состоят из сумм (произведений) каждого возможного значения величины X и каждого возможного значения величины Y.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень всех ее возможных значений и их вероятностей называется *законом распределения* дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

В верхней строке выписываются все возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ величины X, в нижней строке выписываются вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как в результате испытания величина x всегда примет одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Пример. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 р., 10 выигрышей по 100 р. и 100 выигрышей по 1 р. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения для X есть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 100$, $x_4 = 1000$. Вероятности их соответственно будут $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_1 = 1 - 0{,}01 -$ $- 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889$.

Следовательно, закон распределения выигрыша x может быть задан таблицей:

X	0	1	100	1000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

16.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является математическое ожидание.

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения с помощью таблицы, приведенной на с. 411.

Определение 1. *Математическим ожиданием* $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \qquad (1)$$

Пример. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере из 16.1 (п. 2).

Используя полученную там таблицу, имеем:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 1 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}001 + 1000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}21.$$

Очевидно, $M(X) = 0{,}21$ р., т. е. 21 к. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Теорема. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X приближенного ровно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).*

Доказательство. Предположим, что произведено n испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, \ldots, x_k$ соответственно $m_1, \ldots, m_k$ раз, так что $m_1 + \ldots + m_k = n$. Тогда среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X, выразится равенством:

$$x_{\text{ср}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n}, \quad \text{или} \quad x_{\text{ср}} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}.$$

Так как коэффициент m_i/n является относительной частотой события «величина X приняла значение x_i» ($i = 1, 2, \ldots, k$), то

$$x_{\text{ср}} = x_1p_1{}^* + x_2p_2{}^* + \ldots + x_kp_k{}^*.$$

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний $p_i^* \approx p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Поэтому

$$x_{\text{ср}} \approx x_1p_1{}^* + x_2p_2{}^* + \ldots + x_kp_k{}^*, \text{ или } x_{\text{ср}} \approx M(X).$$

Примечание. В связи с только что установленной теоремой математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением*.

2. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины. 1. *Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.*

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*, т. е. $M(CX) = CM(X)$.

Используя соотношение (1), имеем:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots$$
$$\ldots + x_np_n) = CM(X).$$

В дальнейшем часто ради краткости вместо слов «математическое ожидание» будем писать МО.

Следующие два свойства (3–4) примем без доказательства (доказательства см. в [1]).

3. *МО суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их МО:*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение. Случайные величины X *и* Y называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых случайных величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выигрыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи. Несколько случайных величин называются независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. *МО произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:* $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. *МО разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий:* $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$.

Примечание 1. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

Примечание 2. Если множество возможных значений дискретной случайной величины X бесконечно, то математическое ожидание $M(X)$ определяется суммой числового ряда $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ при условии, что этот ряд абсолютно сходится (в противном случае говорят, что математическое ожидание $M(X)$ не существует). Перечисленные свойства МО остаются в силе (см. [3]) и для таких случайных величин.

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$. Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получим:

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

16.3. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие дисперсии. Математическое ожидание не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. Пусть заданы две дискретные случайные величины X и Y своими законами распределения:

X	-2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	-100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Несмотря на то, что МО случайных величин X и Y одинаковы, возможные значения величин X и Y «разбросаны» или «рассеяны» около своих МО по-разному: возможные значения величины X расположены гораздо ближе к своему МО, чем значения величины Y.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X с помощью таблицы (см. с. 411).

Определение 1. *Отклонением случайной величины* X от ее математического ожидания (или просто *отклонением случайной величины* X) называется случайная величина $X - M(X)$.

Вычислим теперь МО отклонения $X - M(X)$. Пользуясь свойствами 5 и 1 (16.2, п. 2), получим $M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0$.

Следовательно, справедлива следующая

Теорема. *Математическое ожидание отклонения* $X - M(X)$ *равно нулю:* $M(X - M(X)) = 0$.

Из теоремы видно, что с помощью отклонения $X - M(X)$ не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее МО, т. е. степень рассеяния величины X. Однако можно освободиться от этого недостатка, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Запишем закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$:

$(X - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	...	$(x_n - M(X))^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 2. *Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X* называется МО квадрата отклонения случайной величины X от ее МО: $D(X) = M((X - M(X))^2)$.

Из закона распределения величины $(X - M(X))^2$ следует, что

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n.$$

2. Свойства дисперсии дискретной величины.

1. *Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между* МО *квадрата величины X и квадратом ее* МО:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Действительно, используя свойства МО, имеем:

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)) =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2\,M^2(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойств МО устанавливаются следующие свойства:

2. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводить его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.*

4. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.*

Методом математической индукции это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствие свойств 3 и 4 является свойство 5.

5. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.*

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найти дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $4X + 3$.

Согласно свойствам 2, 3 и 4 дисперсии, имеем:

а) $D(-3X) = (-3)^2D(X) = 9D(X) = 9 \cdot 3 = 27$;

а) $D(4X + 3) = D(4X) + D(3) = 16D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48$.

3. Среднее квадратическое отклонение.

Определение 1. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ *случайной величины* X называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$.

Имеем:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5;$$

$$D(X)=(1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+(5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12};\quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}\approx 1{,}71.$$

4. Нормированные случайные величины.

Определение. Случайная величина Y называется *нормированной*, если ее математическое ожидание равно 0, а дисперсия 1:

$$M(Y)=0,\ D(Y)=1.$$

От любой случайной величины X можно перейти к нормированной случайной величине Y с помощью линейного преобразования:

$$Y=\frac{X-m}{\sigma},$$

где m — математическое ожидание величины X, а σ — ее среднее квадратическое отклонение.

В самом деле, в силу свойств математического ожидания (16.2, п. 2) и дисперсии (16.3, п. 2) имеем:

$$M(Y)=\frac{1}{\sigma}M(X-m)=\frac{1}{\sigma}(M(X)-m)=\frac{1}{\sigma}(m-m)=0,$$

$$D(Y)=\frac{1}{\sigma^2}D(X-m)=\frac{1}{\sigma^2}(D(X)+D(m))=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1.$$

16.4. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Биномиальное распределение. Пусть производится n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*. Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его ненаступления равна $q = 1 - p$.

В условиях схемы Бернулли найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \le n$).

Предположим, что событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA....A}_{m\ \text{раз}} \quad \underbrace{\overline{A}\,\overline{A}....\overline{A}}_{n-m\ \text{раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых событие A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события равна $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей (15.2, п. 1). Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A в n испытаниях m раз, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \tag{1′}$$

Формула (1) ((1′)) называется *формулой Бернулли*.

Пример. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

а) В данном случае $n = 4$, $m = 3$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. Применяя формулу Бернулли (1′), получим $P_4(3) = (4!/3!1!)(0{,}9)^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916$.

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей: $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$. Но $P_4(4) = (0{,}9)^3 = 0{,}6561$. Поэтому $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Снова рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью p. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может вообще не наступить, наступить один раз, два раза и т. д. и, наконец, наступить n раз. Следовательно, возможными значениями величины X будут числа $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$. По формуле Бернулли (1) можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = q^n,$$

$$P_n(1) = C_n^1 q^{n-1} p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n(n) = p^n.$$

Запишем полученные данные в виде таблицы распределения:

X	0	1	...	m	...	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Построенный закон распределения дискретной случайной величины X называется *законом биномиального распределения*.

Найдем $M(X)$. Очевидно, что X_i — число появлений события A в каждом испытании — представляет собой случайную величину со следующим распределением:

X_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Но так как $X = X_1 + X_2 + \dots$ $\dots + X_n$, то $M(X) = np$.

Найдем далее $D(X)$ и $\sigma(X)$. Так как величина X_i^2 имеет распределение

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

,

то $M(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$. Поэтому

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Наконец, в силу независимости величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) = npq.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

2. Распределение Пуассона. Пусть производится серия n независимых испытаний ($n = 1, 2, 3, \ldots$), причем вероятность появления данного события A в этой серии $P(A) = p_n > 0$ зависит от ее номера n и стремится к нулю при $n \to \infty$(последовательность «*редких событий*»). Предположим, что для каждой серии среднее значение числа появлений события A постоянно, т. е. $np_n = \mu = \mathrm{const}$. Отсюда $p_n = \mu/n$.

Исходя из формулы Бернулли (1), для вероятности появления события A в n-й серии ровно m раз имеем выражение:

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-m}.$$

Пусть m фиксировано. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\mu}{n}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m!\,n^m}\mu^m =$$

$$= \frac{\mu^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right) = \frac{\mu^m}{m!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} = e^{-\mu}$$

(здесь использован второй замечательный предел: 7.3, п. 2). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}.$$

Если n велико, то в силу определения предела (7.3, п. 1), вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от $(\mu^m/m!)e^{-\mu}$. Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона (для простоты знак приближенного равенства опущен):

$$P_n(m) = \frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}, \quad \text{где} \quad \mu = np_n.$$

Пример. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

По условию $n = 500$, $p_n = 0{,}002$, $m = 3$. Поэтому m $= 500 \cdot 0{,}002 = 1$ и искомая вероятность

$$P_{500}(3) = \frac{1}{3!}e^{-1} \approx 0{,}06.$$

Определение. Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона*, если эта величина задана таблицей:

X	0	1	2	3	...
p	$e^{-\mu}$	$\mu e^{-\mu}$	$\frac{\mu^2}{2!}e^{-\mu}$	$\frac{\mu^3}{3!}e^{-\mu}$	...

,

где μ — фиксированное положительное число (разным значениям μ отвечают разные распределения Пуассона).

Найдем математическое ожидание дискретной величины X, распределенной по закону *Пуассона*. Согласно определению математического ожидания (16.2, п. 2, примечание 2), имеем:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu e^{-\mu}e^{\mu} = \mu.$$

Найдем далее $D(X)$. Сначала найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \mu e^{-\mu}\left(\mu\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\mu}\right) = \mu e^{-\mu}(\mu e^{\mu} + e^{\mu}) = \mu^2 + \mu.$$

Теперь по известной формуле (16.3, п. 2)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

3. Локальная и интегральная предельные теоремы Лапласа.

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Лаплас получил важную приближенную формулу для вероятности $P_n(m)$ появления события A точно m раз, если n достаточно большое число. Им же получена приближенная формула и для суммы вида $\sum_{m=k}^{l} P_n(m)$.

Локальная предельная теорема Лапласа (доказательство см. в [1]). *Пусть $p = P(A)$ — вероятность события A, при-*

чем $0 < p < 1$. *Тогда вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласса*:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2}$$

где $q = 1 - p, \quad \varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$.

Для функции $\varphi(x)$ имеется таблица (см. [1] приложение) ее значений для положительных значений x (функция $\varphi(x)$ четная).

Пример 1. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Здесь $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$, и, следовательно, $(m - np)/\sqrt{npq} = (20 - 100 \cdot 0{,}2)/4 = 0$. Учитывая, что $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}40$, из формулы (2) получаем: $P_{100}(20) \approx 0{,}40 \cdot (1/4) = 0{,}10$ (для получения приближенного равенства $1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}40$ можно использовать калькулятор).

Перейдем к интегральной предельной теореме Лапласа. Поставим следующий вопрос: какова вероятность того, что в условиях схемы Бернулли событие A, имеющее вероятность $P(A) = p$ $(0 < p < 1)$, при n испытаниях (как и прежде число испытаний велико) появится не менее k раз и не более l раз? Эту искомую вероятность обозначим через $P_n(k, l)$.

На основании теоремы сложения вероятностей для несовместимых событий (15.2, п. 1) получим:

$$P_n(k, l) = \sum_{m=k}^{l} P_n(m). \tag{3}$$

Установим приближенную формулу Лапласа для подсчета суммы (3) при больших m и n. Используя локальную теорему Лапласа, с учетом (3) приближенно будем иметь:

$$P_n(k, l) \approx \sum_{m=k}^{l} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m),$$

где

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad m = k, \quad k+1, \ldots, l. \tag{4}$$

и

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Далее в силу (4) имеем:

$$\Delta x_m=x_{m+1}-x_m=\frac{(m+1)-np}{\sqrt{npq}}-\frac{m-nq}{\sqrt{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}},\tag{5}$$

и потому

$$P_n(k,l)\approx\sum_{m=k}^{l}\varphi(x_m)\Delta x_m.$$

Здесь сумма справа является интегральной суммой для функции $\varphi(x)$ на отрезке $x_k\le x\le x_l$ причем, как следует из (5), при $n\to\infty$ $\Delta x_m\to 0$. Следовательно, при $n\to\infty$ предел указанной интегральной суммы есть определенный интеграл $\int\limits_{x_k}^{x_l}\varphi(x)dx.$ Поэтому

$$P_n(k,l)\approx\int\limits_{x_k}^{x_l}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_k}^{x_l}e^{-x^2/2}dx,\tag{6}$$

где

$$x_k=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},\quad x_l=\frac{l-np}{\sqrt{npq}}.\tag{7}$$

Это составляет содержание *интегральной предельной теоремы Лапласа.*

Введем функцию

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt,\tag{8}$$

называемую *функцией Лапласа* или *интегралом вероятностей*. Очевидно, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $\varphi(x)$ (так как $\varphi(x)>0$ в $(-\infty;+\infty)$, то $\Phi(x)$ — возрастающая функция в этом интервале; 8.7. теорема 2). Поэтому на основании формулы Ньютона—Лейбница (9.7, п. 2) из формулы (6) будем иметь:

$$P_n(k,l)\approx\Phi(x_l)-\Phi(x_k).\tag{9}$$

Это *интегральная формула Лапласа*.

Как известно (см. 9.5, примечание), интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2/2}dx$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для функции (8) составлена таблица (см. [1] приложение) ее значений для положительных значений x, так как $\Phi(0) = 0$ и функция $\Phi(x)$ нечетная:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-t^2/2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-z^2/2} dz = -\Phi(x); \quad (t = -z, \quad dt = -dz).$$

Пример 2. Вероятность того, что изделие не прошло проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных изделий окажутся непроверенными от 70 до 100 изделий.

Здесь $n = 400$, $k = 70$, $l = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Поэтому в силу равенств (7) $x_k = -1{,}25$, $x_l = 2{,}5$ и согласно формуле (9),

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

16.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Интегральная функция распределения. Для непрерывной случайной величины, в отличие от дискретной, нельзя построить таблицу распределения. Поэтому непрерывные случайные величины изучаются другим способом, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть X — непрерывная случайная величина с возможными значениями из некоторого интервала $(a; b)$ и x — действительное число. Под выражением $X < x$ понимается событие «случайная величина X приняла значение, меньшее x». Вероятность этого события $P(X < x)$ есть некоторая функция переменной x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Определение. *Интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения* непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Отметим, что интегральная функция распределения совершенно так же определяется и для дискретных случайных величин.

Укажем свойства, которыми обладает функция $F(x)$.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того, что $F(x)$ есть вероятность.

2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е. если* $x_1 < x_2$, *то*

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

Доказательство. Предположим, что $x_1 < x_2$. Событие «X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместимых событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 \le X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий соответственно через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$. По теореме о вероятности суммы двух несовместимых событий имеем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда с учетом (1)

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (2)$$

Так как вероятность любого события есть число неотрицательное, то $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, и, значит $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Формула (2) утверждает свойство 3.

3. *Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна разности между значениями интегральной функции распределения в правом и левом концах интервала $(a; b)$:*

$$P(a \le X < b) = F(a) - F(b). \qquad (3)$$

Пример. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad -1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[0; 2)$. Так как на полуинтервале $[0; 2)$ $F(x) = x/4 + 1/4$, то $P(0 \le X < 2) = F(2) - F(0) = 1/2 + 1/4 - 1/4 = 1/2$.

В дальнейшем случайную величину X будем называть *непрерывной*, если непрерывна ее интегральная функция распределения $F(x)$.

4. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо заранее заданное значение, равна нулю:*

$$P(X = x_1) = 0. \qquad (4)$$

Доказательство. Положив в формуле (2) $x_2 = x_1 + \Delta x$, будем иметь:

$$P(x_1 \le X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \qquad (5)$$

Так как $F(x)$ — непрерывная функция, то, перейдя в (5) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим искомое равенство (4).

Из свойства 4 следует свойство 5.

5. *Вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал, сегмент и полуинтеграл с одними и теми же концами одинаковы:*

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) \qquad (6)$$

6. *Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу* $(a; b)$, *то*: 1) $F(x) = 0$ *при* $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ *при* $x \ge b$.

Доказательство. Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно и, следовательно, вероятность его равна нулю. 2) Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно и, следовательно, вероятность его равна 1.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения:*

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

2. Дифференциальная функция распределения. *Дифференциальной функцией распределения* непрерывной случайной величины X (или ее *плотностью вероятности*) называется функция $f(x)$, равная производной интегральной функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Так как $F(x)$ — неубывающая функция (п. 1), то $f(x) \ge 0$ (см. 8.7, п. 1).

Теорема. *Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал* $(a; b)$ *равна определенному интегралу от ее плотности вероятности, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

Доказательство. Так как $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то на основании формулы Ньютона — Лейбница (9.7, п. 2) имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (8)$$

Теперь с учетом соотношений (3), (6), (8) получим искомое равенство.

Из равенства (7) следует, что геометрически (см. 9.6, п. 2) вероятность $P(a < X < b)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Следствие. *В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то*

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)dx. \qquad (9)$$

Действительно, в этом случае аналогично случаю коэффициентов Фурье для четной функции (10.4, п. 5) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, что и доказывает (9).

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0,5; 1).

Согласно формуле (7) искомая вероятность

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} xdx = x^2\Big|_{0{,}5}^{1} = 0{,}75.$$

Заменяя в формуле (8) a на $-\infty$ и b на x, получим:

$$F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

откуда в силу найденного выше следствия (п. 1)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (10)$$

Формула (10) дает возможность отыскать интегральную функцию распределения $F(x)$ по ее плотности вероятности.

Отметим, что из формулы (10) и из только что отмеченного следствия вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (11)$$

3. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Определение 1. *Математическим ожиданием* (*МО*) *непрерывной случайной величины* X с плотностью вероятности

$f(x)$ называется величина несобственного интеграла (если он сходится):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{12}$$

Определение 2. *Дисперсией непрерывной случайной величины X*, математическое ожидание которой $M(X) = a$ и функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла (если он сходится):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx. \tag{13}$$

Можно показать (см. [13]), что МО и дисперсия непрерывной случайной величины имеют те же свойства, что и МО, и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной величины, формулой $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Согласно формулам (12) и (13) имеем:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{2}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{2}{9}$$

и, наконец,

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47$$

(для получения последнего приближенного равенства можно использовать калькулятор).

4. Равномерное распределение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей все свои значения из отрезка $[a; b]$, называется *равномерным*, если ее плотность вероятности $f(x)$ на этом отрезке постоянна, а вне его равна нулю, т. е.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ c, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b cdx=c(b-a). \qquad (14)$$

Но, как известно (см. (11)),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1. \qquad (15)$$

Из сравнения равенств (14), (15) получаем: $c = 1/(b - a)$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 173. Определим интегральную функцию распределения: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Если $x < a$, то $f(x) = 0$, и, следовательно, $F(x) = 0$, если $a \le x \le b$, то $f(x) = 1/(b - a)$, и, следовательно,

$$F(x)=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}.$$

Если $b < x$, то $f(x) = 0$, и, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1.$$

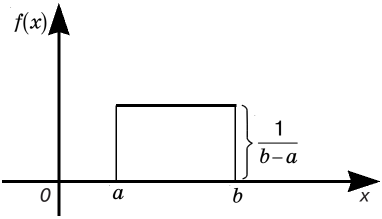


Рис. 173

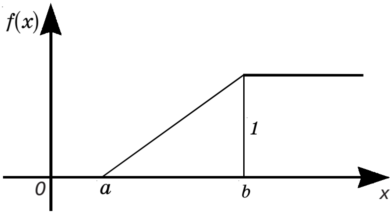


Рис. 174

График функции $F(x)$ показан на рис. 174. Наконец,

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)xdx=\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx=\frac{1}{2}(a+b),$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 dx=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. На отрезке $[a;\ b]$ наугад указывают точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется в левой половине отрезка?

Обозначим через X случайную величину, равную координате выбранной точки. X распределена равномерно (в этом и состоит точный смысл слов «наугад указывают точку»), а так как середина отрезка $[a;\ b]$ имеет координату $(a + b)/2$, то искомая вероятность равна (см. п. 2):

$$P\left(a<X<\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{2}.$$

Впрочем, этот результат был ясен с самого начала.

5. Нормальный закон распределения. Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным* или *законом Гаусса*, если ее плотность вероятности есть

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (16)$$

где σ и a — постоянные, причем $\sigma > 0$.

Убедимся, что функция (16) удовлетворяет условию (11) (п. 2). Действительно, перейдя в интеграле

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (17)$$

к новой переменной

$$t=\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}, \qquad (18)$$

получим интеграл:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Но $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (12.1, п. 6) Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 1. \qquad (19)$$

Значит, интеграл (17) тоже равен единице.

Покажем, что $M(X) = a$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$, или $\sigma^2 = D(X)$.

Согласно формуле (12), получаем:

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введя новую переменную t по формуле (18), с учетом равенства (19) получим:

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a + t\sigma\sqrt{2})e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = a - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a.$$

Аналогично устанавливается, что

$$D(X) = \sigma^2.$$

Отсюда

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

В 8.8. (пример 2) был построен график функции $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса). С учетом графика этой функции график функции (16) будет иметь вид, изображенный на рис. 175.

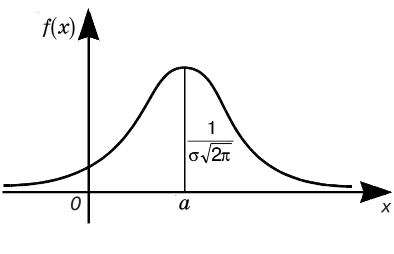


Рис. 175

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормальным*. Плотность вероятности в случае такого распределения будет

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), согласно теореме из п. 2 будет:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделав в этом интервале замену переменной по формуле $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt,$$

откуда с учетом того, что функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ является первообразной для $\varphi(x)$ (16.4, п. 3), и формулы Ньютона—Лейбница (9.7, п. 2) будем иметь:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (20)$$

Пример 1. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10; 50).

Пользуясь формулой (20), получим:

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2).$$

По таблице приложения из [1] находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. найти $P(|X - a| < \delta)$. Используя формулу (20) и нечетность функции $\Phi(x)$, имеем:

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

т. е.

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (21)$$

Пример 2. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 10$. Найти $P(|X - 20| < 3)$.

Используя формулу (21), имеем:

$$P(|X - 20| < 3) = 2\Phi(3/10).$$

По таблице приложения из [1] находим $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$. Поэтому $P(|X - 20| < 3) = 0{,}2358$.

Нормальное распределение вероятностей имеет в теории вероятностей большое значение. Нормальному закону подчиняется вероятность при стрельбе по цели, в измерениях и т. п. В частности, оказывается, что *закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, близок к нормальному распределению*. Этот факт, называемый *центральной предельной теоремой*, был доказан русским математиком А. М. Ляпуновым (1857–1918).

16.6. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

1. Неравенство Чебышева (П. Л. Чебышев (1821–1894) — русский математик).

Лемма. Пусть X — случайная величина, принимающая только неотрицательные значения. Тогда

$$P(X \geq 1) \leq M(X). \qquad (1)$$

Доказательство. Для простоты докажем это утверждение для дискретной случайной величины X, принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при условии $x_i \geq 0$. По теореме сложения вероятностей для несовместимых событий (15.2, п. 1) имеем:

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i),$$

где суммирование распространено на все значения x_i, большие единицы или равные ей. Но для $x_i \geq 1$, очевидно,

$$P(X = x_i) \leq x_i P(X = x_i).$$

Поэтому

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i). \qquad (2)$$

Добавим к правой части неравенства (2) сумму $\sum\limits_{x_i < 1} x_i P(X = x_i)$, где $x_i < 1$. Эта сумма неотрицательна, так как $x_i \geq 0$ по условию, а вероятность $P(X = x_i) \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i). \quad (3)$$

Последняя сумма распространена на все значения x_i, принимаемые случайной величиной X. Следовательно (см. 16.2, п. 1),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = M(X).$$

Отсюда, сопоставляя соотношения (2) и (3), имеем искомое неравенство (1).

Теорема. *Для любой случайной величины X при каждом положительном числе* ε *имеет место неравенство*:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Неравенство (4) называется *неравенством Чебышева*.

Доказательство. Так как событие $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ равносильно событию

$$\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1,$$

то

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Случайная величина $(X - M(X))^2/\varepsilon^2$ неотрицательна, и, значит, согласно лемме, свойству 2 математического ожидания (16.2, п. 2) и определению дисперсии (16.3, п. 1),

$$P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq M\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} M((X - M(X))^2) = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример. Пусть случайная величина X имеет $D(X) = 0{,}001$. Какова вероятность того, что X отличается от $M(X)$ более чем на $0{,}1$?

По неравенству Чебышева

$$P(|X - M(X)| \geq 0{,}1) \leq \frac{D(X)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1.$$

Примечание. Отметим другую форму неравенства Чебышева. Так как событие, выражаемое неравенством $|X - M(X)| < \varepsilon$, противоположно событию, выражаемому неравенством $|X - M(X)| \ge \varepsilon$, то (15.2, п. 1, следствие)

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) + P(|X - M(X)| \ge \varepsilon) = 1.$$

Отсюда с учетом неравенства (4) получаем такую форму неравенства Чебышева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (5)$$

2. Закон больших чисел Чебышева. Докажем закон больших чисел в широкой и удобной для практики форме, полученной П.Л. Чебышевым.

Теорема (теорема Чебышева; закон больших чисел). *Если дисперсии независимых случайных величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ограничены одной и той же постоянной* C, $D(X_i) \le C (i = 1, 2, \ldots, n)$, *то, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *вероятность выполнения неравенства* $|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon$, где $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, *будет сколь угодно близкая к единице, если число случайных величин n достаточно велико, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) = 1. \qquad (6)$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева в форме (5) к величине $\overline{X}$, имеем:

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}. \qquad (7)$$

Пользуясь свойствами дисперсии (19.3, п. 2) и условием теоремы, получим:

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + \ldots + D(X_n)) \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Отсюда с учетом неравенства (7) и того, что вероятность любого события не превосходит единицы (15.1, п. 3), получим:

$$1 \ge P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n} \qquad (8)$$

Наконец, переходя в неравенстве (8) к пределу при $n \to \infty$, приходим к искомому соотношению (6).

Частный случай теоремы Чебышева. *Если все* X_k *имеют одинаковые математические ожидания* $M(X_1) = \ldots = M(X_n) = a$ и $D(X_k) < C$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}-a|<\varepsilon)=1. \qquad (9)$$

Действительно, в условиях рассматриваемого частного случая равенство (6) имеет вид (9).

Сущность теоремы Чебышева состоит в следующем. Несмотря на то, что каждая из независимых случайных величин X_k может принять значение, далекое от математического ожидания $M(X_k)$, среднее арифметическое $\overline{X}$ достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью весьма близко к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Теорема Чебышева имеет большое практическое значение. Пусть, например, измеряется некоторая физическая величина. Обычно принимают в качестве искомого значения измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Можно ли считать такой подход верным? Теорема Чебышева (ее частный случай) отвечает на этот вопрос положительно.

Из теоремы Чебышева следует теорема Бернулли, являющаяся простейшей формой закона больших чисел:

Теорема Бернулли. *Пусть m — число наступлений события A в n независимых испытаниях и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда, каково бы ни было положительное число* ε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (10)$$

Доказательство. Обозначим через X_k случайную величину, равную числу наступлений события A в k-м испытании, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда имеем (16.4, п. 1):

$$m = X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

$$M(X_k) = p,\ D(X_k) = pq \le 1/4,$$

и все условия частного случая теоремы Чебышева выполнены. Равенство (9) превращается в (10).

Практический смысл теоремы Бернулли следующий: при постоянстве вероятности случайного события A во всех испытаниях, при неограниченном возрастании числа испытаний можно с вероятностью, как угодно близкой к единице (т. е. как угодно близкой к достоверности), утверждать, что наблюдаемая относительная частота случайного события будет как угодно мало отклоняться от его вероятности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Баврин Иван Иванович,
Матросов Виктор Леонидович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебник для студентов высших учебных заведений

Зав. художественной редакцией *И.А. Пшеничников*
Художник обложки *Ю.В. Токарев*
Компьютерная верстка *А.Р. Комлев*
Корректоры *Т.Я. Кокорева, О.И. Калинкина*

Отпечатано с диапозитивов, изготовленных
ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС».

Лицензия ИД № 03185 от 10.11.2000.
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006153.08.03 от 18.08.2003.
Сдано в набор 14.10.99. Подписано в печать 20.11.01.
Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л. 25,0.
Тираж 10 000 экз. Заказ №

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС.
119571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет.
Тел. 437-11-11, 437-25-52, 437-99-98; тел./факс 735-66-25.
E-mail: vlados@dol.ru
http://www.vlados.ru

Государственное унитарное предприятие
Полиграфическо-издательский комплекс «Идел-Пресс».
420066, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Декабристов, 2.